Devoir maison n°13

A rendre le 14/03/2023

Exercice 1
On s'intéresse à l'équation aux dérivées partielles (E)

$$(2x-y^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}-16\varphi=0$$

sur le domaine $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 |\ y^2<2x\}$

1. Représenter D et donner un argument pour expliquer pourquoi D est un ouvert.
2. Soit $\Delta=]0,+\infty[\times\mathbb{R}$. On considère l'application h qui, à tout (u,v) de Δ, associe $h(u,v)=\left(\frac{u^2+v^2}{2},v\right)$.
   Justifier, en explicitant sa réciproque, que h est une bijection de Δ sur D. Montrer que h et h^{-1} sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur leurs domaines de définition.
3. Montrer que la fonction φ, de classe $\mathcal{C}^2$ sur D, est solution de (E) si et seulement si la fonction $\psi:\left\{\begin{array}{ccc}\Delta & \to & \mathbb{R}\\ (u,v) & \mapsto & (\varphi\circ h)(u,v)\end{array}\right.$ est solution de l'équation (E) :
   $$\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}-16\psi=0$$
4. Déterminer les solutions de (E) sur Δ.
5. En déduire les solutions de (E) sur D.

Indications

1. Attention à la partie du plan à hachurer.
2. Montrer d'abord que $h(u, v) \in D$, puis exhiber la réciproque (comme pour les changement de variable, ce qu'on va d'ailleurs faire dans l'EDP).
   Pour la classe $\mathcal{C}^2$, méfiez-vous de la racine.
3. Calculer l'expression de gauche de (E) en utilisant la dérivation composée.
4. En deux phases : trouver les solutions et les constantes n'en sont pas, mais sont des fonctions. Montrer ensuite que ces fonctions quelconques doivent être $\mathcal{C}^2$ pour que ψ soit bien $\mathcal{C}^2$.
5. Utiliser l'expression de h^{-1}