Table des matières

I Rappels de 1ère année

II Ordre 2, coefficients non constants

II.1 La théorie

Théorème 1 (Cauchy-Lipschitz)
Soient $a, b, c \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$. Soient également $t_0 \in I$, $v_0, v_0' \in \mathbb{K}$.

Le problème de Cauchy $\begin{cases} y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t) \\ y(t_0) = v_0 \\ y'(t_0) = v_0' \end{cases}$ possède une unique solution $\mathcal{C}^2$ définie sur I.

Théorème 2
Soient $a, b, c \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$.

L'ensemble des solutions sur I de l'équation $y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t)$ est un espace affine de dimension 2. Sa direction est l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée.

Plus précisément, les solutions de l'équation homogène (E_H) $y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0$ sont de la forme $t \mapsto \lambda y_0(t) + \mu y_1(t)$ (pour $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ quelconques) où y_0, y_1 sont solutions de (E_H) et **non proportionnelles**. Toute solution de (E) est de la forme $y_p + y_H$ où y_p est une solution particulière de (E) et y_H une solution quelconque de (E_H).

II.2 Exemples de résolution

Proposition 1 (Trouver une deuxième solution)
On considère léquation différentielle $y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0$ sur l'intervalle I.

Si on connaît une solution y_0 de (E) **qui ne s'annule pas** sur I, alors on fait un changement de fonction inconnue, $\lambda = \frac{y}{y_0}$ ie on cherche une autre solution y sous la forme $y = \lambda y_0$ où $\lambda \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{K})$ est notre inconnue.

En replaçant dans l'équation, le terme en λ disparaît toujours.