Exercice 1 (Révisions sur les EDL1)

1. Résoudre, sur un intervalle que vous préciserez, les équations différentielles :
   (a) $y' - 3y = 0$
   (b) $y'(t) - ty(t) = 0$
   (c) $xy'(x) + y(x) = 0$
   (d) $y'(t) - \frac{1}{3t}y(t) = 0$
   (e) $\frac{y'(x)}{y(x)} + \ln(y(x)) = 0$
2. Même question
   (a) $y'(x) - xy(x) = x$
   (b) $(1+t)y'(t) - y(t) = 1$
3. Donner la seule fonction, définie sur un intervalle à préciser, solution des problèmes de Cauchy suivants :
   (a) $ty'(t) - y(t) = t^2$ et $y(1) = 0$
   (b) $y'(t) + \ln(t)y(t) = t^{t+1}$ et $y(1) = 2$.

Exercice 2 (Révisions sur les EDL2)

1. Donner les solutions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles des équations différentielles suivantes.
   (a) $y'' - 16y = 0$
   (b) $y'' + 4y = 0$
   (c) $y'' + 4y\prime + 4y = 0$
   (d) $y'' - 2y' + 2y = 0$
2. Donner la ou les solutions de
   (a) $y''(x) + y(x) = \cos(x)$.
   (b) $y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = e^t$, $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$.

Exercice 3

Résoudre $x^2y''(x) + 4xy'(x) - (x^2 - 2)y(x) = 0$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\mathbb{R}^{-*}$ puis sur $\mathbb{R}$.
(on pourra poser $z : x \mapsto x^2y(x)$)

Exercice 4

On considère l'équation différentielle (E) : $y''(x) - 2xy'(x) - 2y(x) = 0$.

1. Déterminer une fonction f solution de (E) sur $\mathbb{R}$ et telle que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$, sous forme de fonction développable en série entière.
2. Montrer que f ne s'annule pas.
3. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5

On considère l'équation (E) $(1 + x^2)y''(x) + xy'(x) - y(x) = 0$.

1. Déterminer une solution polynomiale sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer les solutions de (E).

Exercice 6

1. Vérifier que la fonction $f : x \to (\arcsin x)^2$ est solution sur $]-1,1[$ de l'équation différentielle
$$\left(1-x^2\right) y''(x) - xy'(x) = 2. \tag{E}$$
2. On cherche une fonction développable en série entière vérifiant (E) ainsi que les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$.
   On cherchera y sous la forme $y(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$ où les a_n sont des réels à déterminer.
   (a) Montrer que pour $n \geqslant 1$ on a $a_{n+2} = \frac{n^2}{(n+1)(n+2)}a_n$.
   (b) En déduire l'expression de a_{2n+1} puis celle de a_{2n} pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. En déduire que f est développable en série entière sur $]-1,1[$ et donner son développement.
4. Bonus : Montrer que la série converge pour $x = 1$. Que dire sur sa limite ?

Exercice 7

Déterminer les solutions développables en série entière de l'équation différentielle
$$x^2(1-x)y''(x) - x(1+x)y'(x) + y(x) = 0.$$
Reconnaître les sommes des séries trouvées.

En déduire toutes les solutions de cette équation différentielle sur $\mathbb{R}^{-*}$, $]0,1[$ ou $]1,+\infty[$.