Devoir maison 10

Devoir d'entraînement.

Exercice 1
Dans ce problème, nous allons étudier une suite classique et très utile.

Partie I

On définit la fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x}{2} + \frac{1}{x} \end{array} \right.$ et la suite (u_n) par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{1}{u_n}$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3
2. Résoudre l'équation $f(\alpha) = \alpha$ d'inconnue $\alpha \in \mathbb{R}^*$.
3. Etudier les variations de la fonction f ainsi que ses limites.
4. Supposons pour cette question seulement que (u_n) converge vers un réel $l \neq 0$. Quelles sont les valeurs possibles pour l ?
5. On souhaite maintenant prouver que la suite (u_n) est bien définie, c'est à dire qu'elle ne s'annule jamais. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \geqslant \sqrt{2}$. Ainsi notre suite est bien définie et nous pouvons poursuivre l'étude.
6. Etudier la monotonie de la suite (u_n).
7. Montrer que $u_n \to \sqrt{2}$.
8. Il semble d'après la première question que les valeurs de (u_n) soient des fractions. Prouvons le ! Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on peut écrire $u_n = \frac{p_n}{q_n}$ avec $p_n, q_n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Donner également le lien entre p_{n+1}, q_{n+1} et p_n, q_n.

Patie II

Dans cette partie on considère les suites $(a_n), (b_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définies par $a_0 = 3, b_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} a_{n+1} = a_n^2 + 2b_n^2 \\ b_{n+1} = 2a_n b_n \end{cases}$

On admet que ces suites sont à valeurs entières strictement positives (ce qui est prouvable assez facilement d'ailleurs...)

1. Calculer a_1, a_2, b_1, b_2.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n \geqslant a_0^{(2^n)}$ en utilisant le fait que $a_{n+1} \geqslant a_n^2$.
3. En déduire les limites de (a_n) et (b_n).
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $a_n^2 - 2b_n^2 = 1$. .
5. Montrer que si $d \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ est tel que $d | a_n$ et $d | b_n$ alors $d = 1$. Ainsi la fraction $\frac{a_n}{b_n}$ est réduite.
6. En factorisant l'expression de la question 4, calculer la limite de $\frac{a_n}{b_n}$.
7. Donner un équivalent de $\frac{a_n}{b_n} - \sqrt{2}$ en fonction de a_n.

Exercice 2
Dans l'espace munit d'une repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ on considère les plans $Q_1 : x + 2y - z + 1 = 0$ et $Q_2 : x - y + 2z - 2 = 0$.

Dans cet exercice, on admet que la distance d'un point de coordonnées (α, β, γ) à un plan d'équation $ax+by+cz+d = 0$ est donné par $\frac{|a\alpha+b\beta+c\gamma+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

1. Donner un point et une base pour chacun de ces plans.
2. Montrer que $Q_1 \cap Q_2$ est une droite $\mathcal{D}$ sont on précisera une représentation paramétrique.
3. Pour tout $m \in \mathbb{R}$ on note $\mathcal{P}_m$ l'ensemble d'équation $(x + 2y - z + 1) + m(x - y + 2z - 2) = 0$. Montrer que $\mathcal{P}_m$ un plan de l'espace.
4. Que peut-on dire de la droite $\mathcal{D}$ vis-à-vis du plan $\mathcal{P}_m$?
5. Trouver les éventuels $m \in \mathbb{R}$ tel que P_m est perpendiculaire à Q_1.
6. Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble d'équation $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 1 = 0$. Vérifier que $\mathcal{S}$ est une sphère et préciser son centre Ω et son rayon R.
7. Existe-t-il des plans $\mathcal{P}_m$ tangents à $\mathcal{S}$? Si oui le(s)quel(s) ?
8. Décrire géométriquement $P_1 \cap \mathcal{S}$.