Table des matières

I Espace préhilbertien, espace euclidien **1**
I.1 Produit scalaire . . . 1
I.2 Théorèmes . . . 1
I.3 Projections et symétries orthogonales . . . 2

II Isométries **2**
II.1 Cas général . . . 2
II.2 Groupe orthogonal en dimension 2 . . . 3
II.3 Groupe orthogonal en dimension 3 . . . 3

I Espace préhilbertien, espace euclidien

I.1 Produit scalaire

Définition 1
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Un produit scalaire sur E est une application $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} E\times E & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \varphi(x,y) \end{array} \right.$ qui a les propriétés suivantes :

1. Bilinéaire : $\forall \lambda,\mu \in \mathbb{R} \forall u,v,w \in E$ $\varphi(\lambda u+\mu v,w)=\lambda\varphi(u,w)+\mu\varphi(v,w)$ et $\varphi(u,\lambda v+\mu w)=\lambda\varphi(u,v)+\mu\varphi(u,w)$.
2. Symétrique : $\forall u,v\in E$ $\varphi(u,v)=\varphi(v,u)$.
3. Positive : $\varphi(u,u)\geqslant 0$.
4. Définie : $\varphi(u,u)=0 \Rightarrow u=0$

Un produit scalaire est donc une forme bilinéaire, symétrique, définie, positive.

Notation. Quand φ est un produit scalaire, on note plutôt $(u|v)$, $\langle u,v\rangle$, ou $u\cdot v$ à la place de $\varphi(u,v)$

Définition 2
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel munit d'un produit scalaire. On dit alors que E est un espace préhilbertien réel, et si E est de dimension finie on dit que E est un espace euclidien.

I.2 Théorèmes

Théorème 1
Toutes les définitions et propriétés portant sur les produits scalaires et les normes vues dans le chapitre 9 sur le théorème spectral sont encore valables dans un espace euclidien E (c'est à dire un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension fini dans lequel on a défini un produit scalaire) ou dans un espace préhilbertien (la même chose, mais en dimension infini, par exemple $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ avec le produit scalaire intégral). La seul condition est de remplacer la base canonique de $\mathbb{R}^n$ par une base **orthonormée** de E.

En particulier on pourra utiliser les notions :
— norme d'un vecteur, elle est nulle ssi le vecteur est le vecteur nul.
— lien norme-produit scalaire (définition de la norme, identité de polarisation)
— inégalité de Cauchy-Schwartz et triangulaire.
— orthogonalité de vecteurs, liberté d'une famille de vecteurs orthogonaux 2 à 2 et non nuls. Théorème de Pythagore
— base orthonormée et calcul des coordonnées dans une telle base
— procédé de Gram-Schmidt pour créer une base orthogonale ou orthonormale à partir d'une base existante
— espaces orthogonaux et orthogonal d'un sous-espace (avec une généralisation, voir la proposition 1)

Théorème 2 (Rappel : coordonnées dans une base orthonormée)
Soit E un espace euclidien et $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ une base **orthonormée** de E.

Soit $x,y\in E$ et notons $X=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)=\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}$, $Y=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(y)=\begin{pmatrix} y_1\\ \vdots \\ y_n\end{pmatrix}$ leurs colonnes de coordonnées dans $\mathcal{B}$

1. $\forall k\in [\![1,n]\!]$ $x_k=\langle x,e_k\rangle$ ou encore $x=\sum\limits_{k=1}^{n}\langle x,e_k\rangle e_k$.
2. $\langle x,y\rangle=\sum\limits_{k=1}^{n} x_k y_k = X^T Y$.

Proposition 1 (Orthogonal d'un sous espace)
Soit E un espace préhilbertien et F un sous-espace de E.

Si F est de dimension finie, alors $F\oplus F^{\perp}=E$.

I.3 Projections et symétries orthogonales

Définition 3
Soit E un espace préhilbertien et F un sous-espace de dimension finie de E .

1. La projection orthogonale sur F est la projection sur F parallèlement à (de direction) $F^{\perp}$.
2. La symétrie orthogonale sur F est la symétrie par rapport à F de direction $F^{\perp}$.

Proposition 2
Soit E un espace préhilbertien et F un sous-espace de dimension finie de E dont une BON est $(u_1, \ldots, u_r)$. On note p_F le projecteur orthogonal sur F. Alors

$$\forall x \in E \ p_F(x) = \sum_{i=1}^{r} (x|u_i)u_i$$

En particulier, si $F = \text{Vect}(u)$ est une **droite**, $p_F(x) = (x|u)u$ où u est **de norme 1**.

Définition 4
Une symétrie orthogonale par rapport à une droite est appelée retournement, et une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan est appelé réflexion.

Proposition 3 (Inégalité de Bessel)
Soit F un sous-espace de dimension finie de E. On note p_F le projecteur orthogonal sur F.

$$\forall x \in E \ \|p_F(x)\| \leqslant \|x\|$$

Théorème 3 (Moindres carrés)
Soit F un sous-espace de dimension finie de E. Pour $x \in E$, on note $d(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\|$ la distance de x à F.

Il existe un unique $x_0 \in F$ tel que $d(x, F) = d(x, x_0) = \|x - x_0\|$ et donc la borne inférieure est en fait un minimum. x_0 est le projeté orthogonal de x sur F.

II Isométries

E est maintenant un espace euclidien, c'est à dire de dimension finie et munit dun produit scalaire.

II.1 Cas général

Définition-Proposition 1
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ une application linéaire. On a équivalence entre

1. f conserve le produit scalaire ie $\forall x, y \ (f(x)|f(y)) = (x|y)$
2. f conserve la norme, ie $\forall x \in E \ \|f(x)\| = \|x\|$.

Dans ce cas, f est bijective et est appelé automorphisme orthogonal ou encore isométrie vectorielle.
L'ensemble est automorphismes orthogonaux de E est noté $O(E)$.

Corollaire 1
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base **orthonormée** de E.

$$f \in O(E) \iff \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \in O_n(\mathbb{R})$$

Proposition 4
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes.

1. $f \in O(E)$
2. L'image de toute BON de E par f est une BON de E.
3. L'image d'une certaine BON de E par f est encore une BON de E.

Proposition 5
La composition de deux isométries est encore une isométrie, et l'inverse (bijection réciproque) d'une isométrie est encore une isométrie.

Proposition 6
Soit $f \in O(E)$. Si F est un sous-espace de E stable par f (ie $f(F) \subset F$) alors $F^{\perp}$ est stable par f.

Proposition 7
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base **orthonormée** de E. On note $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

$$M \text{ est symétrique et } M \in O_n(\mathbb{R}) \iff f \text{ est une symétrie orthogonale}$$

II.2 Groupe orthogonal en dimension 2

Définition 5
Soit $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ et $S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$.

On a $R_\theta \in SO_2(\mathbb{R}) et S_\theta \in O_2 \backslash SO_2(\mathbb{R})$.

Proposition 8 (Caractérisation de $O_2(\mathbb{R})$)
Soit $M \in O_2(\mathbb{R})$.

1. $M \in SO_2(\mathbb{R})$ ssi il existe θ tel que $M = R_\theta$. Ainsi les matrices de $SO_2(\mathbb{R})$ commutent entre elles.
2. $\det M = -1$ ssi M est de la forme S_θ

Corollaire 2
Soit E un espace euclidien de dimension 2.

Soit $f \in O(E)$ une isométrie de ce plan. Alors
— f est une rotation ssi $\det(f) = 1$.
— f est une réflexion (une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan, cest à dire une symétrie axiale) ssi $\det(f) = -1$.

Dans le cas d'une rotation, il suffit de déterminer l'image d'un vecteur de base pour en déduire l'angle. Pour une réflexion, on cherche la droite de point fixe pour la caractériser géométriquement.

II.3 Groupe orthogonal en dimension 3

Proposition 9
Soit $f \in O(E)$ une isométrie d'un espace euclidien. Si f possède une valeur propre λ réelle, alors $\lambda = \pm 1$.

Définition-Proposition 2
On note $\mathcal{B} = (u, v, w)$ une base orthonormée directe de E

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que pour un $\theta \in [-\pi, \pi]$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

La matrice de f ne dépend pas du choix de v, w tant que (u, v, w) est une base orthonormée directe.

Théorème 4 (Les types d'isométries)
Soit $f \in O(E)$ avec E un espace euclidien de dimension 3.

1. Si $\det f = 1$ alors f est une rotation de l'espace (ou un retournement qui est une rotation d'angle π).
2. Si $\det f = -1$, alors f est soit une réflexion soit la composée d'une réflexion et d'une rotation (l'axe de rotation étant orthogonal au plan de réflexion).

Proposition 10 (Etude d'une matrice orthogonale)
Soit $M \in O_3(\mathbb{R})$. On suppose $M \neq \pm I_3$.

On note f l'endomorphisme canoniquement associé (ou plus généralement, une isométrie dont M est la matrice dans une BOND)

1. Si M est symétrique, alors f est une symétrie orthogonale. Si $\mathrm{tr}(M) = 1$ il s'agit d'une réflexion (symétrie par rapport à un plan), si $\mathrm{tr}(M) = -1$ il s'agit d'une symétrie axiale (retournement).
2. Sinon il y a deux cas.
   (a) Si $\det(M) = 1$, alors f est une rotation.
   (b) Si $\det(M) = -1$ alors $-M$ est une matrice de rotation d'axe $\mathrm{Vect}(u)$ orienté par u et d'angle θ. Alors f est au choix :
   — la composée de la réflexion par rapport à $\mathrm{Vect}(u)^\perp$ et de la rotation d'axe $\mathrm{Vect}(u)$ et d'angle $\theta + \pi$.
   — la composée commutative de la rotation d'axe $\mathrm{Vect}(u)$ et d'angle θ et de la symétrie centrale de centre O

Proposition 11
Soit $M \in SO_3(\mathbb{R})$ alors M est la matrice d'une rotation d'axe $D = \mathrm{Vect}(u)$ (orienté par u) et d'angle θ vérifiant :

1. D est le noyau de $M - I_3$. On note $D = \mathrm{Vect}(u)$ où u est unitaire.
2. Pour X un vecteur $X \notin D$. θ vérifie $\begin{cases} \mathrm{tr}(M) = 1 + 2\cos\theta \\ sg(\sin(\theta)) = sg([u, X, MX]) \end{cases}$ où le déterminant est calculé dans une BOND, de préférence dans la base canonique. En règle générale, on prend pour X un vecteur de la base canonique.