

# Devoir maison n°14

A rendre le 28/03

## Exercice 1

On considère dans cet exercice une rotation de  $\mathbb{R}^3$ , et on note la base canonique  $\mathcal{B}_c$ . Le produit scalaire utilisé est le produit scalaire canonique.

Notons  $r$  la rotation d'axe orienté par  $u \in \mathbb{R}^3$  un vecteur unitaire et d'angle  $\theta \in \mathbb{R}$ .

1. Rappeler la matrice de  $r$  dans une base  $\mathcal{B} = (u, v, w)$  orthonormée directe et dont le premier vecteur est  $u$ . Que vaut la trace de  $r$ ?  
Exprimer  $r(v)$  et  $r(w)$ .
2. On souhaite maintenant pouvoir calculer  $r(X)$  pour un  $X \in \mathbb{R}^3$  dont les coordonnées seront données dans  $\mathcal{B}_c$ .  
On fixe pour le reste de l'exercice un  $X \in \mathbb{R}^3$ . Montrer que la projection orthogonale de  $X$  sur  $D = \text{Vect}(u)$  est  $p_D(X) = \langle X, u \rangle u$ .
3. Que peut-on dire du vecteur  $X - p_D(X)$ ? On pourra noter  $P = \text{Vect}(u)^\perp$  le plan normale à  $u$ . (Question subsidiaire : si on note  $u = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ , comment traduire l'hypothèse  $u$  est de norme 1, et que dire sur une équation de  $P$ ?)
4. On note  $Y = X - p_D(X)$  et  $Z = u \wedge Y$ . En supposant de  $Y \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ , que dire de la base  $(u, Y', Z')$  où  $Y' = \frac{Y}{\|Y\|}$  et  $Z' = \frac{Z}{\|Z\|}$ ? En déduire que  $r(Y) = \cos(\theta)Y + \sin(\theta)Z$ .
5. Montrer que  $r(X) = \cos(\theta)X + (1 - \cos(\theta)) \langle X, u \rangle u + \sin(\theta)u \wedge X$ . On pourra comparer  $u \wedge X$  et  $u \wedge Y$ .
6. Bonus : en notant  $u = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ , en déduire (éventuellement sous forme de somme) la matrice de  $r$  dans la base canonique.

**Indications**

1. Définitions
2. On peut utiliser les coordonnées dans  $\mathcal{B}$  ou un raisonnement classique (DS 4)
- 3.
4. Attention, on veut  $r(Y)$  et pas  $r(Y)$  (sinon on retrouve exactement la question 1). Calculer  $\|Z\|$  en fonction de  $\|Y\|$ .
5. Traduire les résultats précédents et ne pas oublier de traiter le cas restant.
6. Traduire la formule précédente pour obtenir une matrice.