

Table des matières

I Représentation des surfaces	1
I.1 Surface paramétrée	1
I.2 Surface définie par une équation cartésienne	1
I.3 Courbes tracées sur des surfaces	2
II Exemples de surfaces et de courbes	2
II.1 Surfaces réglées	2
II.2 Surface de révolution	2
II.3 Intersection de surfaces	2

I Représentation des surfaces

I.1 Surface paramétrée

Définition 1

On appelle nappe paramétrée ou surface paramétrée une fonction de classe \mathcal{C}^k ($k \geq 1$) définie sur un ouvert U de \mathbb{R}^2 et à valeurs dans \mathbb{R}^3 . Une telle fonction f sera notée $f : (u, v) \mapsto \overrightarrow{OM}(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix}$.

Le support d’une surface paramétrée est l’ensemble $S = \{M(u, v) \mid (u, v) \in U\} = f(U)$.

On a alors $A = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \in S \iff \exists (u, v) \in U \begin{cases} x_0 = x(u, v) \\ y_0 = y(u, v) \\ z_0 = z(u, v) \end{cases}$

Définition 2

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ une nappe paramétrée et $(u_0, v_0) \in U$.

Au point $M_0 = M(u_0, v_0)$ on peut définir deux courbes paramétrées de l’espace appelées courbes coordonnées de f en M_0 :

- $\Gamma_1 : u \mapsto f(u, v_0)$.
- $\Gamma_2 : v \mapsto f(u_0, v)$.

Définition 3

Soit $f : (u, v) \mapsto \overrightarrow{OM}(u, v)$ une surface paramétrée définie sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$. On note S son support. Soit $(u_0, v_0) \in U$ et $M_0 = M(u_0, v_0)$.

1. On dit que M_0 est un point **régulier** de S (ou de f) ssi $\left(\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial v}(u_0, v_0)\right)$ est libre c’est à dire ssi $\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial u}(u_0, v_0) \wedge \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial v}(u_0, v_0) \neq \vec{0}$.
Sinon on dit que M_0 est un point singulier ou stationnaire.
2. Si M_0 est régulier, on appelle plan tangent à S en M_0 le plan

$$M_0 + \text{Vect}\left(\frac{\partial M}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial M}{\partial v}(u_0, v_0)\right).$$

Définition 4

On considère $M_0 = M(u_0, v_0)$ un point régulier d’une nappe paramétrée. La droite normale à cette nappe en M_0 est la droite passant par M_0 et perpendiculaire au plan tangent en M_0 (elle est dirigée par un vecteur normal à ce plan).

I.2 Surface définie par une équation cartésienne

Définition 5

Soit U un ouvert de \mathbb{R}^3 et $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$. On appelle surface d’équation (implicite) $f(x, y, z) = 0$ l’ensemble $\Sigma =$

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = 0 \right\} \text{ (l’ensemble des solutions de l’équation).}$$

Un point $M \in \Sigma$ est dit **régulier** ssi $\overrightarrow{\text{grad}} f(M) \neq \vec{0}$ et singulier sinon.

Théorème 1 (Plan tangent)

Soit U un ouvert de \mathbb{R}^3 et $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$. Soit Σ la surface d’équation $f(x, y, z) = 0$ et $M_0 \in \Sigma$ un point régulier.

Alors le plan tangent à Σ en M_0 est le plan passant par M_0 et normal à $\overrightarrow{\text{grad}} f(M_0)$ ie le plan d’équation

$$(x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) + (z - z_0) \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 0$$

I.3 Courbes tracées sur des surfaces

Proposition 1

Soit Γ une courbe paramétrée tracée sur une surface Σ .

Si M_0 est un point de Γ régulier pour la courbe paramétrée Γ et régulier pour la surface Σ (il y a deux définitions possibles, suivant la description de Σ), alors la tangente à Γ en M_0 est contenue dans le plan tangente à Σ en M_0 .

II Exemples de surfaces et de courbes

II.1 Surfaces réglées

Définition 6

Une surface S est dite **réglée** ssi elle peut être écrite comme la réunion d'une famille de droites.

Plus précisément, S est réglée ssi il existe une surface paramétrée dont le support est S de la forme $M(k, t) = A(t) + k\vec{u}(t)$ où A, \vec{u} sont de classe $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}^3)$ et \vec{u} ne s'annule pas. M est alors définie sur $I \times \mathbb{R}$.

Pour un t fixé, la droite $\mathcal{D}_t = A(t) + \text{Vect}(\vec{u}(t))$ est une **génératrice** de S et on a $S = \bigcup_{t \in I} \mathcal{D}_t$

Proposition 2

Soit S une surface réglée. En un point régulier M_0 , le plan tangente contient la génératrice passant par M_0 .

II.2 Surface de révolution

Définition 7

On appelle surface de révolution la surface S obtenue par rotation d'une courbe Γ autour d'une droite Δ . Plus précisément, il s'agit de la réunion de toutes les images de Γ par les rotations d'axe Δ et d'angle quelconque.

- Δ est l'axe de S .
- Les intersections de S avec les plans orthogonaux à Δ sont soit vide soit des cercles d'axe Δ que l'on appelle parallèles de S .
- Un plan méridien de S est un plan qui contient Δ .
- Une méridienne de S est l'intersection de S avec un demi-plan méridien, délimité par Δ .

II.3 Intersection de surfaces

Définition 8

Soit U un ouvert de \mathbb{R}^3 et $f, g \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$.

On appelle courbe d'équation cartésienne $\Gamma : \begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases}$ l'intersection des des surfaces ainsi définies (cette intersection peut être une surface, un ou des points, vide...).

Un point $M_0 \in \Gamma$ est dit régulier si et seulement si $\overrightarrow{\text{grad}} f(M_0) \wedge \overrightarrow{\text{grad}} g(M_0) \neq \vec{0}$

Théorème 2

Avec les notations de la définition précédente, si $M_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ est un point régulier de Γ alors la tangente à Γ en M_0

est la droite $M_0 + \text{Vect}(\overrightarrow{\text{grad}} f(M_0) \wedge \overrightarrow{\text{grad}} g(M_0))$