Table des matières

Dans ce chapitre on rapporte l'espace usuel euclidien à $\mathbb{R}^3$ par le choix d'un repère orthonormé de référence $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ et on identifie les points avec leur colonne de coordonnées.

I Représentation des surfaces

I.1 Surface paramétrée

I.1.1 Définition

On appelle nappe paramétrée ou surface paramétrée une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ ($k \geqslant 1$) définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^3$. Une telle fonction f sera notée $f : (u,v) \mapsto \overrightarrow{OM}(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix}$.

Le support d'une surface paramétrée est l'ensemble $S = \{M(u,v) | \, (u,v) \in U\} = f(U)$.

On a alors $A = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \in S \iff \exists (u,v) \in U \begin{cases} x_0 = x(u,v) \\ y_0 = y(u,v) \\ z_0 = z(u,v) \end{cases}$

I.1.2 Exemple

On considère le plan affine $\mathcal{P} = A + \mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$ où $A = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Alors $M : \begin{pmatrix} x \\ y \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{P} \iff \exists u,v \in \mathbb{R} \; M = A + u\vec{u} + v\vec{v} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+u+2v \\ 2+0u+v \\ 1+u+2v \end{pmatrix}$

et donc $\mathcal{P}$ est le support de la nappe paramétrée

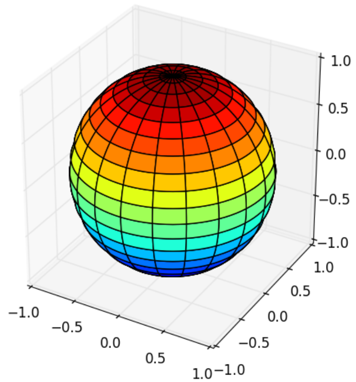
$$f : (u,v) \mapsto \begin{pmatrix} -1+u+2v \\ 2+0u+v \\ 1+u+2v \end{pmatrix}$$

On écrit souvent que $\mathcal{P}$ est paramétré par

$$\begin{cases} x = -1+u+2v \\ y = 2+v \\ z = 1+u+2v \end{cases}, (u,v) \in \mathbb{R}^2$$

I.1.3 Exemple

Pour $u, v \in [-\pi, \pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ on pose $M(u,v) = \begin{pmatrix} \sin(u)\cos(v) \\ \sin(u)\sin(v) \\ \cos(u) \end{pmatrix}$ (Si on veut définir f sur un ouvert on peut la définir sur $\mathbb{R}^2$)



I.1.4 Définition

Soit $f : U \to \mathbb{R}^3$ une nappe paramétrée et $(u_0, v_0) \in U$.

Au point $M_0 = M(u_0, v_0)$ on peut définir deux courbes paramétrées de l'espaces appelées courbes coordonnées de f en M_0 :

— $\Gamma_1 : u \mapsto f(u, v_0)$.

— $\Gamma_2 : v \mapsto f(u_0, v)$.

I.1.5 Explication

— Il s'agit de courbes car on utilise un seul paramètre

— Ces courbes passent par le point M_0.

Au point M_0, on peut définir la droite tangente à Γ_1 lorsque $\frac{\mathrm{d}\Gamma_1}{\mathrm{d}u}(u_0) \neq \vec{0}$ (ce n'est pas le seul cas, pour l'étude locale des courbes) ie $\frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0) \neq \vec{0}$.

De même, pour Γ_2 où on obtient la condition $\frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0) \neq \vec{0}$. Lorsque ces deux droites ne sont pas confondues, elles définissent un plan affine passant par M_0.

I.1.6 Définition

Soit $f : (u, v) \mapsto \overrightarrow{OM}(u, v)$ une surface paramétrée définie sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$. On note S son support. Soit $(u_0, v_0) \in U$ et $M_0 = M(u_0, v_0)$.

1. On dit dit M_0 est un point **regulier** de S (ou de f) ssi $\left(\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial v}(u_0, v_0)\right)$ est libre c'est à dire ssi $\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial u}(u_0, v_0) \wedge \frac{\partial \operatorname{Vect} OM}{\partial v}(u_0, v_0) \neq \vec{0}$.
   Sinon on dit que M_0 est un point singulier ou stationnaire.
2. Si M_0 est régulier, on appelle plan tangent à S en M_0 le plan

$$M_0 + \operatorname{Vect}(\frac{\partial M}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial M}{\partial v}(u_0, v_0)).$$

I.1.7 Exemple

Pour $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ on pose $\begin{cases} x(u,v) = u + v \\ y(u,v) = u - v \\ z(u,v) = uv \end{cases}$. Trouvons les points réguliers ainsi que le plan tangent en $(u, v) = (0, 0)$.

$\frac{\partial M}{\partial u}(u, v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ v \end{pmatrix}$, $\frac{\partial M}{\partial v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ u \end{pmatrix}$. Alors $\frac{\partial M}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial M}{\partial v}(u, v) = \begin{pmatrix} u+v \\ u+v \\ -2 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$.

En $(0, 0)$ le plan tangent est normal à $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ donc a une équation de la forme $z + c = 0$ où $c \in \mathbb{R}$ est à trouver. Or $M(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc le plan cherché est d'équation $z = 0$.

Plus généralement, au point $M(u_0, v_0)$, le plan tangent est normal à $\begin{pmatrix} u_0+v_0 \\ u_0+v_0 \\ -2 \end{pmatrix}$ et possède donc une équation de la forme $(u_0 + v_0)x + (u_0 + v_0)y - 2z + c = 0$ où $c \in \mathbb{R}$ est à trouver. Or ce plan passe par $M(u_0, v_0)$ donc $(u_0 + v_0)^2 + u_0^2 - v_0^2 - 2u_0v_0 + c = 0$. Après simplification on trouve $c = -2u_0^2$.

Donner une représentation paramétrique de ce plan.

I.1.8 Définition

On considère $M_0 = M(u_0, v_0)$ un point régulier d'une nappe paramétrée. La droite normale à cette nappe en M_0 est la droite passant par M_0 et perpendiculaire au plan tangent en M_0 (elle est dirigée par un vecteur normal à ce plan).

I.2 Surface définie par une équation cartésienne

I.2.1 Définition

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^3$ et $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$. On appelle surface d'équation (implicite) $f(x, y, z) = 0$ l'ensemble $\Sigma = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 |\ f(x, y, z) = 0\}$ (l'ensemble des solutions de l'équation).

Un point $M \in \Sigma$ est dit **régulier** ssi $\overrightarrow{grad} f(M) \neq \vec{0}$ et singulier sinon.

I.2.2 Cas particulier des surfaces représentatives

L'équation se met sous la forme $z = \varphi(x, y)$ où φ est $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Une telle surface peut être paramétrée par $M(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ f(u,v) \end{pmatrix}$.

Tous les points sont réguliers car on obtient $\frac{\partial M}{\partial u}(u, v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x}(u,v) \end{pmatrix}$, $\frac{\partial M}{\partial v}(u, v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y}(u,v) \end{pmatrix}$ et la plan tangent est normal à $\begin{pmatrix} -\frac{\partial \varphi}{\partial x}(u,v) \\ -\frac{\partial \varphi}{\partial y}(u,v) \\ 1 \end{pmatrix}$.

On retrouve le résultat du cours sur les fonctions de deux variables. Au point $M_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ de la surface $S : z = \varphi(x, y)$, le plan tangent est d'équation

$$z - \underbrace{z_0}_{=\varphi(x_0,y_0)} = (x - x_0)\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0)\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0)$$

I.2.3 Exemple

On peut par exemple considérer les surfaces d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ou $x^2 + y^2 = 4$ (décrire cette dernière).

I.2.4 Egalité avec une surface paramétrée

Reprenons $M(u, v) = \begin{pmatrix} \sin(u)\cos(v) \\ \sin(u)\sin(v) \\ \cos(u) \end{pmatrix}$ et notons S le support de la nappe paramétrée.

Si $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M(u,v) \in S$ alors $x^2+y^2+z^2=1$ et donc $S \subset \Sigma : x^2+y^2+z^2=1$. Dans le cas général, montrer l'égalité est délicat. Le cas favorable est quand les surfaces ne sont pas égales et il suffit de trouver un point de Σ qui ne soit pas dans S (on raisonne souvent sur les signes d'une ou plusieurs coordonnées).

Dans notre exemple, il y a égalité et nous allons le montrer.

Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \Sigma$. Ainsi $(x^2+y^2)+z^2=1$. Donc il existe un $\alpha \in]-\pi,\pi]$ (unique d'ailleurs) tel que $z=\cos(\alpha)$ et $x^2+y^2=\sin^2\alpha$.

Si $\sin(\alpha)=0$, alors $x=y=0$ et $z=\pm 1$ Alors $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M(0,0)$ ou $M(0,\pi)$.

Sinon, $\left(\frac{x}{\sin\alpha}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sin\alpha}\right)^2 = 1$ et donc (toujours d'après le cours de sup), il existe $\beta \in]-\pi,\pi]$ tel que $\frac{x}{\sin\alpha} = \cos\beta$ et $\frac{y}{\sin\alpha} = \sin\beta$.

En posant $u=\alpha$ et $v=\beta$, on a bien $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M(u,v)$ et donc $\Sigma \subset S$.

I.2.5 Théorème (Plan tangent)
Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^3$ et $f \in \mathcal{C}^1(U,\mathbb{R})$. Soit Σ la surface d'équation $f(x,y,z)=0$ et $M_0 \in \Sigma$ un point régulier.

Alors le plan tangent à Σ en M_0 est le plan passant par M_0 et normal à $\overrightarrow{grad}\, f(M_0)$ ie le plan d'équation

$$(x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0) + (y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0) + (z-z_0)\frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) = 0$$

Preuve.
En partie admise.

On admet que lorsque $\overrightarrow{grad}\, f(M_0) \neq \vec{0}$, on peut trouver une nappe paramétrée régulière égale à Σ au voisinage de M_0 sous la forme $(u,v) \mapsto \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix} = M(u,v)$ et $M_0 = M(0,0)$.

Alors, $f(x(u,v),y(u,v),z(u,v)) = 0$ et en dérivant par rapport à u on obtient $\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial z} = 0$ et de même pour v. Alors, en interprétant ces relations comme produit scalaire, on voit que le gradient est bien orthogonale aux deux vecteurs dérivés partiels de $\overrightarrow{OM}$. ∎

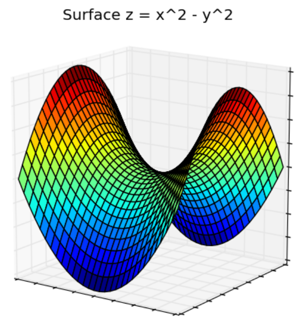
I.2.6 Exemple
Calculons l'équation du plan tangent et une représentation paramétrique de la normale en tout point régulier de $S : z = x^2 - y^2$.

Tous les points sont réguliers (le gradient en $M_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ est $\overrightarrow{grad}\, f(M_0) = \begin{pmatrix} 2x_0 \\ -2y_0 \\ -1 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$) et en $M_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ x_0^2 - y_0^2 \end{pmatrix} \in S$, le plan tangent est

$$P_0 : z = z_0 + (x-x_0)2x_0 + (y-y_0)\times(-2y_0) = 2x_0 x - 2y_0 y - x_0^2 + y_0^2$$

La normale est alors $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ x_0^2 - y_0^2 \end{pmatrix} + \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 2x_0 \\ -2y_0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Elle est paramétrée par

$$\begin{cases} x = x_0 + 2x_0 t \\ y = y_0 - 2y_0 t \\ z = x_0^2 - y_0^2 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$



Bilan des représentations : on se donne un point $M : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

- Dire que M est un point d'une surface d'équation donnée, c'est dire que les coordonnées de M vérifient cette équation.
- Dire que M est un point d'une nappe paramétrée, c'est dire qu'on peut exprimer les coordonnées de M en fonctions de deux réels (notés u et v plus haut).

I.3 Courbes tracées sur des surfaces

On a déjà croisé les courbes coordonnées sur les nappes paramétrées. Généralisons le résultat.

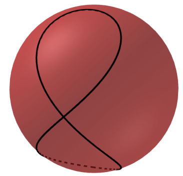
I.3.1 Modes de définition

- Pour une nappe paramétrée S, les courbes tracées sur S sont des courbes de la forme $t \mapsto \overrightarrow{OM}(u(t), v(t))$.

  Le cas des courbes coordonnées est un cas particulier où l'une des fonctions u ou v est constante et l'autre l'identité.

- Pour une surface Σ donnée par une équation $f(x, y, z) = 0$, les courbes tracées sur Σ sont les courbes de la forme $t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ où pour tout t on a $f(x(t), y(t), z(t)) = 0$.

I.3.2 Exemple
On considère la sphère paramétrée comme plus haut et la courbe $\Gamma : t \mapsto M(t, t) = \begin{pmatrix} \cos(t)\sin t \\ \sin^2(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$.



On peut par exemple vouloir projeter cette courbe sur un plan et tracer la courbe obtenue. Le faire sur le plan d'équation $y = 0$.

I.3.3 Proposition
Soit Γ une courbe paramétrée tracée sur une surface Σ.

Si M_0 est un point de Γ régulier pour la courbe paramétrée Γ et régulier pour la surface Σ (il y a deux définitions possibles, suivant la description de Σ), alors la tangente à Γ en M_0 est contenue dans le plan tangente à Σ en M_0.

Preuve.
Nous prouvons ce résultat pour les deux manières de définir Σ.

1. Si Σ est paramétrée par $M(u, v)$ et $M_0 = M(u_0, v_0)$. Alors Γ est définie par $\Gamma : t \mapsto M(u(t), v(t))$.
   Alors Γ est dérivable par composition et on a pour $t \in I$, $\gamma'(t) = u'(t)\frac{\partial M}{\partial u}(u(t), v(t)) + v'(t)\frac{\partial M}{\partial v}(u(t), v(t))$.
   Si on applique en t_0 (le paramètre de M_0), on obtient le résultat souhaité (et même les coefficients de la combinaison linéaire correspondante qui sont respectivement $u'(t_0)$ et $v'(t_0)$).
2. Si $\Sigma : f(x, y, z) = 0$ et que Γ est donnée par $t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ alors on a pour tout t
   $$f(x(t), y(t), z(t)) = 0$$
   et en dérivant par rapport à t (par composition), on obtient bien $\overrightarrow{grad}\, f(M_0) \perp \Gamma'(t_0)$ et donc la tangente à Γ en M_0 (qui est dirigée par $\Gamma'(t_0)$) est bien

contenue dans le plan passant par M_0 et normal à $\overrightarrow{grad}\, f(M_0)$ qui est le plan tangent. ■

II Exemples de surfaces et de courbes

II.1 Surfaces réglées

II.1.1 Définition

Une surface S est dite **réglée** ssi elle peut être écrite comme la réunion d'une famille de droites.

Plus précisément, S est réglée ssi il existe une surface paramétrée dont le support est S de la forme $M(k,t) = A(t) + k\vec{u}(t)$ où $A, \vec{u}$ sont de classe $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}^3)$ et $\vec{u}$ ne s'annule pas. M est alors définie sur $I \times \mathbb{R}$.

Pour un t fixé, la droite $\mathcal{D}_t = A(t) + \mathrm{Vect}(\vec{u}(t))$ est une **génératrice** de S et on a $S = \bigcup_{t \in I} \mathcal{D}_t$

II.1.2 Exemple

Le cylindre d'équation $x^2 + y^2 = 1$ est réglé. Ses génératrices sont parallèles à (Oz). Une paramétrisation possible est $M(k,t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ k \end{pmatrix}$

II.1.3 Exemple

Considérons la jolie surface $\Sigma : x^2 + y^2 - z^2 = 1$ (hyperboloïde de révolution à une nappe).

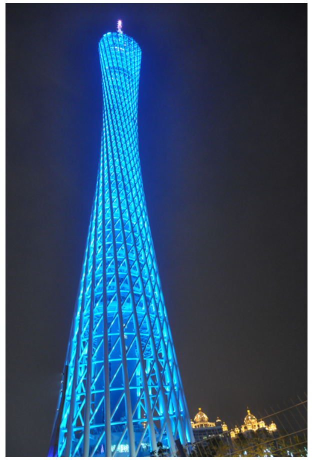
Nous allons démontrer que cette surface est réglée.

Soit $M = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Supposons pour l'instant $x \neq \pm 1$.

$M \in \Sigma$ ssi $(y-z)(y+z) = (1-x)(1+x)$.

Or $(1-x)(1+x) \neq 0$ donc $M \in \Sigma$ ssi il existe un $t \neq 0$ tel que $(y-z) = t(1-x)$ et $(y+z) = \frac{1+x}{t}$. C'est à dire $\begin{cases} tx + y - z = t \\ -\frac{1}{t}x + y + z = \frac{1}{t} \end{cases}$. Il s'agit de l'intersection de 2 plans non parallèles et donc d'une droite.

Remarquons que cette droite passe par $A(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ t \\ -t \end{pmatrix}$ et en posant x comme paramètre dans le système homogène, elle est dirigée par $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t} - t\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t} + t\right) \end{pmatrix}$ et donc par $\begin{pmatrix} 2t \\ 1 - t^2 \\ 1 + t^2 \end{pmatrix}$ qui est



bien non nul.

Ainsi les points de Σ d'abscisse $\neq \pm 1$ sont décrits par une réunion de droites.

Le cas $x = \pm 1$ est facile : on obtient $y = \pm z$ et $\begin{cases} x = \pm 1 \\ y = \pm z \end{cases}$ est la réunion de 4 droites.

II.1.4 Exemple (Un cône)

On considère l'ellipse $\mathcal{C} : \begin{cases} x^2 + \frac{y^2}{4} = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ et le point $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Donner un représentation de la surface réglée Σ engendrée par les droites qui passent par A et un point de $\mathcal{C}$.

On peut donner une représentation paramétrique facilement, car les droites $\mathcal{D}_t$ qui sont génératrices de Σ sont de la forme $\mathcal{D}_t = A + \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} \cos(t) - 1 \\ 2\sin(t) - 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Trouvons une équation cartésienne. On a, pour les points de Σ, $\begin{cases} x = 1 + k(\cos t - 1) \\ y = 1 + k(2\sin(t) - 1) \\ z = 1 - k \end{cases}$ $\Leftarrow$

$\begin{cases} x - z = k\cos t \\ y - z = 2k\sin t \\ k = 1 - z \end{cases}$.

Ainsi les points de Σ vérifient $4(x-z)^2 + (y-z)^2 = 4(1-z)^2$ (on a une inclusion, on peut vérifier la deuxième d'une manière similaire au raisonnement fait sur la sphère en posant $k = 1 - z$).

II.1.5 Proposition
Soit S une surface réglée. En un point régulier M_0, le plan tangent contient la génératrice passant par M_0.

Preuve.
Avec les notations de la définition, $\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial k}(k,t) = \vec{u}(t)$ est un des vecteurs qui engendre la direction du plan tangent. ■

II.2 Surface de révolution

II.2.1 Définition

On appelle surface de révolution la surface S obtenue par rotation d'une courbe Γ autour d'une droite Δ. Plus précisément, il s'agit de la réunion de toutes les images de Γ par les rotations d'axe Δ et d'angle quelconque.

- Δ est l'axe de S.
- Les intersections de S avec les plans orthogonaux à Δ sont soit vide soit des cercles d'axe Δ que l'on appelle parallèles de S.
- Un plan méridien de S est un plan qui contient Δ.
- Une méridienne de S est l'intersection de S avec un demi-plan méridien, délimité par Δ.

II.2.2 Matrices de rotation autour d'un axe de coordonnées

Rappeler les matrices de rotation d'un angle θ autour d'un axe de coordonnées orienté par un vecteur de la base canonique.

II.2.3 Remarque

On peut traduire la condition M est l'image d'un point M_0 par une certaine rotation autour de D par la condition $d(M,D) = d(M_0,D)$ et $\overrightarrow{MM_0} \perp D$.

II.2.4 Exemple

Donner une paramétrisation et une équation de la surface de révolution S obtenue par rotation de $\mathcal{D} = A + \mathrm{Vect}(u) = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$ autour de l'axe (Oz).

1. Une paramétrisation de $\mathcal{D}$ est $\begin{cases} x(t) = 1+t \\ y(t) = 2t \\ z(t) = -2t \end{cases}$.

   Ainsi $M = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in S$ ssi il existe $M_t \in D$ tels que M est obtenu par rotation de M_t d'un angle θ autour de (Oz) ssi il existe t tel que$x = (1+t)\cos\theta - 2t\sin\theta$, $y = (1+t)\sin\theta + 2t\cos\theta$ et $z = -2t$ pour un $\theta \in [-\pi, \pi]$.

   On a calculé $R_\theta \overrightarrow{OM_t}$ où R_θ est la matrice de rotation d'angle θ autour de l'axe orienté par $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

2. Trouvons une équation cartésienne directement.

   Un système d'équation de $\mathcal{D}$ est $2x - y = 2$ et $y + z = 0$. Dans la suite, on veut se débarrasser du $\exists M_0$ c'est à dire montrer que les nombres x_0, y_0, z_0 existent à une condition qui ne porte que sur x, y, z.

   $M = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in S$ ssi il existe $M_0 = \begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix} \in D$ tel que $d(M_0,(Oz)) = d(M,(Oz))$ et $z = z_0$ ssi il existe $M_0 \in D$ tel que $x_0^2 + y_0^2 = x^2 + y^2$ et $z = z_0$.

   Or, pour $M_0 \in \mathcal{D}$, $y_0 = -z_0$ et $x_0 = \frac{1}{2}y_0 + 1 = -\frac{z_0}{2} + 1$.

   Ainsi, $M \in S$ ssi il existe $x_0, y_0, z_0 \in \mathbb{R}$ tels que $z_0 = z, y_0 = -z, z_0 = -\frac{z}{2} + 1$ et $(-\frac{z}{2} + 1)^2 + z^2 = x^2 + y^2$. De tels nombres réels existent toujours.

   $M \in S$ ssi $\frac{5}{4}z^2 - z + 1 = x^2 + y^2$.

II.3 Intersection de surfaces

II.3.1 Définition

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^3$ et $f, g \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$.

On appelle courbe d'équation cartésienne $\Gamma : \begin{cases} f(x,y,z) = 0 \\ g(x,y,z) = 0 \end{cases}$ l'intersection des des surfaces ainsi définies (cette intersection peut être une surface, un ou des points, vide...).

Un point $M_0 \in \Gamma$ est dit régulier si et seulement si $\overrightarrow{grad}\, f(M_0) \wedge \overrightarrow{grad}\, g(M_0) \neq \vec{0}$

II.3.2 Théorème
Avec les notations de la définition précédente, si $M_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ est un point régulier de Γ alors la tangente à Γ en M_0 est la droite $M_0 + \mathrm{Vect}(\overrightarrow{grad}\, f(M_0) \wedge \overrightarrow{grad}\, g(M_0))$

Preuve.
Une idée : la tangente à Γ est l'intersection des plans tangents à Σ_1 et Σ_2 en M_0. De plus, le gradient est normal au plan tangent. ■

II.3.3 Exemple
Décrire géométriquement la courbe plane $\mathcal{C}$: $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x - y + \frac{1}{\sqrt{2}} z = 0 \end{cases}$.

$\mathcal{C}$ est l'intersection d'un plan et d'un sphère : il s'agit d'un cercle ou d'un point ou de l'ensemble vide.

Décrire la projection orthogonale de $\mathcal{C}$ sur (xOy). Un point M : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ est sur la projection cherchée ssi il existe $z \in \mathbb{R}$ tel que M_1 : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in C$

$$\iff \exists z \in \mathbb{R} \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ z = \sqrt{2}(y - x) \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + y^2 + 2(x-y)^2 = 1 \\ \exists z \in \mathbb{R}\ z = \sqrt{2}(y - x) \end{cases}$$

la deuxième condition est toujours vérifiée.

On obtient une conique d'équation $x^2 + y^2 + 2(x-y)^2 = 1 \iff 3x^2 - 4xy + 3y^2 = 1$
La matrice associée est $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ dont les valeurs propres sont 1 et 5. De plus $E_1(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $E_5(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ainsi par rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$ on obtient l'équation réduite $x'^2 + 5y'^2 = 1$ qui est une équation d'ellipse que l'on sait tracer.

```python
u = np.array([1, 1]) / np.sqrt(2)
v = np.array([-1, 1]) / np.sqrt(2)
T = np.linspace(-np.pi, np.pi, 150)
points = [np.cos(t) * u + np.sin(t) * v / np.sqrt(5) for t in T]
X = np.array([p[0] for p in points])
Y = np.array([p[1] for p in points])
plt.plot(X, Y)
```

Index