Plan tangent

Exercice 1
Trouver les plans tangents à la surface $\mathcal{S}$ d'équation $x^2+y^2+4z^2=1$ et parallèles au plan d'équation $x+2y+z=0$.

Exercice 2
On considère la surface $S : x-8yz=0$ et la droite $\mathcal{D} : \begin{cases} y=1 \\ x+4z+2=0 \end{cases}$.

Déterminer les plans tangents à S qui contiennent la droite $\mathcal{D}$.

Surfaces réglées

Exercice 3 (Application directe du cours)

1. On considère $f : (x,y) \mapsto x^3-3xy$. Montrer que f possède un unique point critique qui est un point col de sa surface représentative.
2. Montrer que la surface $S : z = x^3-3xy$ est réglée.

Exercice 4
Soit $\mathcal{S}$ la surface définie par les équations paramétriques

$$x=u^2 \quad , \quad y=uv \quad , \quad z=u-v$$

Montrer que $\mathcal{S}$ est une surface réglée.

Donner le plan tangent en un point régulier.

Exercice 5
On considère la courbe $\Gamma : \begin{cases} x(t)=t \\ y(t)=t^2 \\ z(t)=t+1 \end{cases}, t\in\mathbb{R}$ et le point $\Omega : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Soit S la surface réglée obtenue comme réunion de toutes les droites passant par un point de Γ et Ω (ce genre de surface réglée est appelé un cône).

1. Donner une paramétrisation de S.
2. Donner une équation cartésienne de S (ou au moins d'une surface contenant S).

Exercice 6
On considère la courbe $\Gamma : \begin{cases} x^2+2y^2-z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ et le vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Soit Σ la surface réglée réunion des droites passant par un point de Γ et dirigées par $\vec{u}$ (ce genre de surface est appelée cylindre). Donner une équation cartésienne de Γ.

Révolution

Exercice 7
Déterminer une équation de la surface S de révolution de $\Gamma : \begin{cases} x^2-z^2=1 \\ y=0 \end{cases}$ autour de $\Delta=(Ox)$.

Exercice 8
On considère la courbe $\mathcal{C}$ paramétrée par $\begin{cases} x(t)=\cos^3(t) \\ y(t)=\sin^3(t) \\ z(t)=\cos(2t) \end{cases}, t\in[-\pi,\pi]$. Déterminer une équation de la surface de révolution de $\mathcal{C}$ autour de (Oz).

Exercice 9
Soit $S : (x^2+y^2+z^2)^2 = a^2(x^2-y^2-z^2)$ (où $a>0$ est fixé). Montrer que S est une surface de révolution autour d'un axe à préciser et tracer une méridienne.[1]

Approfondissement

Exercice 10
Soit $a>0$, et soit Γ l'intersection de la sphère $\mathcal{S}$ d'équation $x^2+y^2+z^2=a^2$ et du cylindre $\mathcal{C}$ d'équation $x^2+y^2-ax=0$.

1. Déterminer une paramétrisation de Γ.
2. Quel est la tangente à Γ en l'un de ses points ?
3. Soit P le point d'intersection de la tangente à Γ en un point M avec le plan $(x0y)$. Déterminer le lieu de P lorsque M parcourt Γ.

Exercice 11
Soient $a,b,c>0$. on considère la surface $S : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.

1. Pour $\theta\in[0,2\pi]$, on considère le point $A_\theta = \begin{pmatrix} a\cos\theta \\ b\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \in S$. Montrer qu'il existe exactement deux droites passant par A_θ et contenue dans S.
2. Soient $x,y,u,v\in\mathbb{R}$ vérifiant $x^2+y^2=u^2+v^2$. Montrer qu'il est possible de trouver $\theta\in\mathbb{R}$ tel que
$$\begin{cases} x=u\cos\theta-v\sin\theta \\ y=u\sin\theta+v\cos\theta \end{cases}$$
3. En déduire deux familles de droites engendrant S puis montrer que toute droite incluse dans S est dans l'une de ces deux familles.

1. Indication : pour la méridienne, on pourra d'abord chercher une équation sur les coordonnées polaires.