Devoir maison n°15

A rendre le 04/04

Exercice 1
On se place dans l'espace euclidien orienté $\mathbb{R}^3$ muni de la base orthonormée directe canonique $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Pour un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$, on note $f^2 = f \circ f$.

1. On note f la rotation autour de l'axe dirigé par $\vec{e}_3$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
   (a) Décrire l'endomorphisme f^2.
   (b) Écrire la matrice C de f dans la base $\mathcal{B}$.
   (c) Les matrices C et C^2 son-elles diagonalisables dans $\mathbb{R}$? Dans $\mathbb{C}$?
2. Soit $\vec{w}' = (1, 1, -4)$. On note g la rotation autour de l'axe dirigé par $\vec{w}'$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
   (a) Déterminer un vecteur unitaire $\vec{w}$ colinéaire à $\vec{w}'$ puis deux vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ tels que $\mathcal{B}' = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ forme une base orthonormée directe.
   (b) Écrire la matrice de g dans la base $\mathcal{B}'$ puis dans la base $\mathcal{B}$. On note $M_{\mathcal{B}}$ cette dernière matrice.
   (c) Les matrices $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}$ et $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^2$ sont-elles diagonalisables dans $\mathbb{R}$?

Indications

1. (a) Sans justification, une description géométrique suffit.
   (b) Voir le cours !
   (c) Attention à la rédaction, revoir le chapitre correspondant.
2. (a) On a le choix pour $\vec{u}$ mais plus pour $\vec{v}$.
   (b) Le calcul final est pénible, mais votre matrice de passage doit être dans $SO_3(\mathbb{R})$ donc son inverse est facilement calculable.
   L'expression de $M_{\mathcal{B}}$ n'est pas nécessaire pour la question suivante.
   (c) Penser matrices semblables.