Table des matières

I Intégrales dépendant d'un paramètre

I.1 Cadre d'étude

I.2 Continuité

Théorème 1
(On s'intéresse ici à la continuité d'une fonction de la forme $f : x \mapsto \displaystyle\int_J \varphi(x,t)\mathrm{d}t$)

Soit I, J deux intervalles non triviaux de $\mathbb{R}$, $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} I \times J & \to & \mathbb{K} \\ (x,t) & \mapsto & \varphi(x,t) \end{array} \right.$ une fonction. Supposons que :

1. Pour $x \in I$ fixé, $\varphi_x : t \mapsto \varphi(x,t)$ est continue sur J.
2. Pour $t \in J$ fixé, $\varphi_t : x \mapsto \varphi(x,t)$ est continue sur I.
3. (hypothèse de domination) Il existe $g : J \to \mathbb{R}$ une fonction positive, continue et **intégrable** sur J telle que

$$\forall (x,t) \in I \times J \ |\varphi(x,t)| \leqslant g(t)$$

Alors la fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \int_J \varphi(x,t)\mathrm{d}t \end{array} \right.$ est définie et continue sur l'intervalle I.

Proposition 1
Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction.
Pour $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$,

1. f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I si et seulement si f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur tout segment $[a,b]$ inclus dans I.
2. Si $I =]0, +\infty[$, f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I ssi f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$.

II Dérivabilité

II.1 Approche intuitive

II.2 Le théorème

Théorème 2
(On s'intéresse ici à la classe $\mathcal{C}^1$ d'une fonction de la forme $f : x \mapsto \displaystyle\int_J \varphi(x,t)\mathrm{d}t$)

Soit I, J deux intervalles non triviaux de $\mathbb{R}$, $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} I \times J & \to & \mathbb{K} \\ (x,t) & \mapsto & \varphi(x,t) \end{array} \right.$ une fonction. Supposons que :

1. Pour $x \in I$ fixé, $\varphi_x : t \mapsto \varphi(x,t)$ est continue sur J et **intégrable** sur J.
2. Pour $t \in J$ fixé, $\varphi_t : x \mapsto \varphi(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.
3. Pour $x \in I$ fixé, $t \mapsto \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t) = \varphi_t'(x)$ (la dérivée partielle dont on vient de prouver l'existence, mais comme fonction de t) est continue sur J
4. (hypothèse de domination) Il existe $g : J \to \mathbb{R}$ une fonction positive, continue et **intégrable** sur J telle que

$$\forall (x,t) \in I \times J \ |\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t)| \leqslant g(t)$$

Alors la fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \int_J \varphi(x,t)\mathrm{d}t \end{array} \right.$ est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle I. De plus, pour $x \in I$

$$f'(x) = \int_J \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t$$