Surface représentative

Pour une fonction f de deux variables (notées x et y), on appelle surface représentative de f la surface d'équation $z = f(x, y)$.

I Continuité

I.1 Notions de topologie

I.1.1 Approche intuitive

On considère une partie $A \subset \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ (c'est à dire un ensemble de points du plan ou de l'espace)

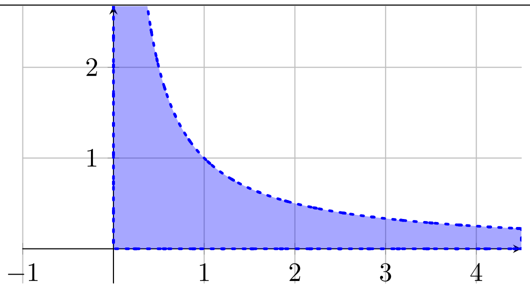
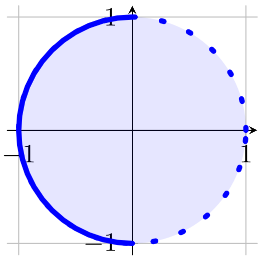
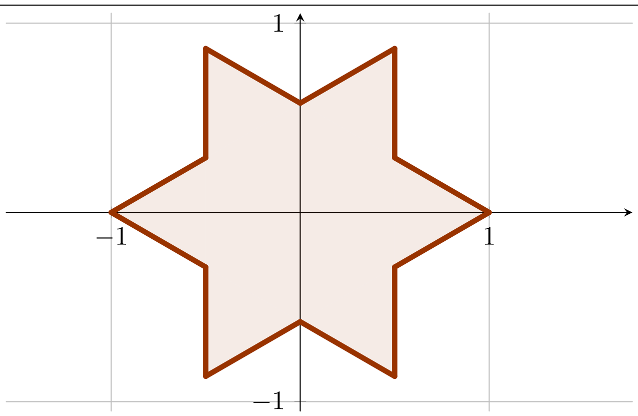
— Dire que A est bornée revient à dire qu'aucun morceau de A ne "va vers l'infini".

— Dire que A est fermée c'est dire que A contient "sa frontière". En pratique on définie souvent les parties fermées par des inégalités larges.

— Dire que A est ouverte c'est dire que A ne contient aucun point de sa "frontière". En pratique, on utilise souvent des inégalités strictes pour définir A.

I.1.2 Exemples

On utilise ici une convention classique : les courbes en pointillées ne sont pas des points de A alors que les courbes en traits pleins en sont. Dans chaque exemple on définit $A = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2;\ \text{ une condition donnée dans le tableau } \}$

	Tracé	définition	bornée ?	ouverte ?	fermée ?
1)		$x > 0$ et $0 < y < 1/x$			
2)		$\begin{cases} x^2+y^2 \leqslant 1 \text{ et } x \leqslant 0 \\ \text{ou} \\ x^2+y^2 < 1 \text{ et } x > 0 \end{cases}$			
3)		??			
4)		$\mathbb{R}^2$			
5)		$(\mathbb{R}^*)^2$			
6)		$[a, b] \times [c, d]$			
7)		$]a, b[\times]c, d[$			

I.2 Fonctions continues

I.2.1 Définition

Il s'agit de la même définition que celle d'une limite finie classique, sauf qu'il faut utiliser la norme et non la valeur absolue, pour mesurer la distance.

I.2.2 Prouver qu'une fonction est continue

1. On gère les variables multiples (2 ou 3 variables) avec les mêmes théorèmes que pour les fonctions d'une variable : somme, produit par une constante, produit de fonctions continues (fonctions à valeurs scalaires) , quotient dont le dénominateur ne s'annule pas (idem), composition (tous les cas).
2. Lorsque que la fonction est à valeurs vectorielles, on traite les coordonnées une par une, comme pour les courbes paramétrées.

Exercice 1
Donner l'ensemble sur lequel les fonctions $f : (x, y) \mapsto \frac{xy}{x^2+y^2}$ et $g : (x, y) \mapsto \arccos(x^2 - y^2)$ sont continues, et faire un schéma à chaque fois.

I.2.3 Le résultat théorique

1. Résultat général : l'image d'un fermé borné par une fonction continue est une partie fermée et bornée.
2. Cas particulier : si $f : A \to \mathbb{R}$ (à valeurs réelles, ie scalaires) est définie sur un ensemble fermé et borné, alors f possède un maximum global et un minimum global.
3. Lien avec le cours de sup : on avait le théorème des bornes atteintes. Si f est continue et définie sur un segment (qui est un intervalle fermé et borné), alors f possède un minimum global et un maximum global (ie son ensemble image est un segment).

I.2.4 Application aux intégrales à paramètres, un exemple

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. On pose $D = [a, b] \times [0\frac{\pi}{2}]$ On considère $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} D & \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & \cos(x\sin(t)) \end{array} \right.$

1. Montrer que φ est continue sur son domaine de définition.
2. Justifier qu'il existe une constante $M \in \mathbb{R}^+$ telle que $\forall (x, t) \in D \ |\varphi(x, t)| \leqslant M$.
3. En déduire, rapidement, que $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(x, t)\mathrm{d}t$ est une fonction continue sur $[a, b]$. Sur quel intervalle, le plus grand possible, peut-on affirmer que f est continue ?

II Dérivées partielles

II.1 Dérivabilité

II.1.1 Dérivabilité, classes

1. On prouve la dérivabilité, la classe $\mathcal{C}^1$ ou $\mathcal{C}^2$ en considérant les variables une par une. Par exemple, on considère que x est la variable et que toutes les autres variables (de la fonction) sont en fait fixée (le temps du raisonnement sur la dérivabilité). Les théorèmes d'opérations sont les mêmes.
2. Dérivation en pratique. L'idée est la même qu'au point précédent, on ne raisonne que sur une seule variable. En pratique, on peut remplacer les autres par des notations qui ne font plus penser à des variables.

II.1.2 Exemple

On considère $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & y\sin(xy) \end{array} \right.$.

— f est dérivable par rapport à x (on a $f : (x, \alpha) \mapsto \alpha \sin(\alpha x)$), et même de classe $\mathcal{C}^2$ par rapport à cette variable.
— f est dérivable par rapport à y par produit ($f : (\alpha, y) \mapsto y \sin(\alpha y)$), et même de classe $\mathcal{C}^2$ (ou tout autre classe voulue).
— Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y^2 \cos(xy)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \sin(xy) + yx\cos(xy)$.

II.1.3 Notation

On note parfois $\partial_1 f$ au lieu de $\frac{\partial f}{\partial x}$ pour désigner la dérivée par rapport à la première variable.
Dans tous les cas il s'agit d'une fonction. On ne peut pas, dans l'exemple précédent noter $\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 \sin(xy)$.

Exercice 2
Justifier que $\varphi : (x,t) \mapsto \frac{\cos(t)}{x+t}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b] \times [0, \frac{\pi}{2}]$ où $a > 0$ et $b > a$.

En déduire que $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(x,t)$ est dérivable sur $[a,b]$ puis dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

II.2 Taylor-Young

II.2.1 Deux formes

On peut écrire comme dans le cours, au voisinage de (x_0, y_0),

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) + h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) + \underset{(h,k)\to(0,0)}{o}(\|(h,k)\|)$$

mais aussi

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + (x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + (y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) + \underset{(x,y)\to(x_0,y_0)}{o}(\|(x-x_0, y-y_0)\|)$$

Exercice 3
On considère la surface $S : z = f(x,y)$ représentative de la fonction f. A quelle condition sur f peut-on utiliser le cours sur les surfaces pour calculer le plan tangents ? Rappeler une équation du plan tangent au point régulier $M_0 : \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ f(x_0,y_0) \end{pmatrix}$.

Faire le lien avec la formule de Taylor-Young à l'ordre 1.

II.2.2 Formule de composition

En pratique, pour une composition de deux fonctions de deux variables, on peut noter (voir le cours complet pour d'autres notations possibles) :
- $f : (x,y) \mapsto f(x,y)$ à valeurs scalaires ou vectorielles, peut importe.
- $\varphi : (u,v) \mapsto (a(u,v), b(u,v))$ (noter que φ est à valeurs vectorielles, le même nombre de coordonnées que f a de variables).
- $g = f \circ \varphi : (u,v) \mapsto f(a(u,v), b(u,v))$.
- Alors
$$\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial a}{\partial u}(u,v)\frac{\partial f}{\partial x}(a(u,v),b(u,v)) + \frac{\partial b}{\partial u}(u,v)\frac{\partial f}{\partial y}(a(u,v),b(u,v))$$
  et
$$\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = \frac{\partial a}{\partial v}(u,v)\frac{\partial f}{\partial x}(a(u,v),b(u,v)) + \frac{\partial b}{\partial v}(u,v)\frac{\partial f}{\partial y}(a(u,v),b(u,v))$$
- Noter que seules les fonctions a et b dépendent de u, v directement et ce sont elles que l'on dérive par rapport à u ou v. Les dérivées de f qui apparaissent dénotent seulement la position des fonctions a et b. il faut retenir que l'on somme les deux compositions possibles.

Exercice 4
On pose $f : (x,y) \mapsto f(x,y)$ une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et $g : (r,\theta) \mapsto f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ définie sur $\mathbb{R}^+ \times [-\pi, \pi]$. On considère le changement de variables correspondant au passage aux coordonnées polaires.

Justifier que g est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer ses dérivées partielles.

II.2.3 Le théorème de Schwartz

Il s'agit d'un résultat théorique et pratique : dans le cas d'une fonction $\mathcal{C}^2$, l'ordre de dérivation partielle n'importe pas.

II.3 Equations aux dérivées partielles

III Extremas

On cherche à savoir si une fonction de plusieurs variable possède un minimum ou un maximum (local ou global).

III.1 Points critiques

III.1.1 Intérêt, limitations

On cherche les extrema, dans un premier temps avec la méthode suivante :

1. On se place sur un ouvert, c'est fondamental. Au pire, on exclu les frontières de l'ensemble de définition.
2. On cherche les points de cet ouvert où le gradient s'annule, ie le plan tangent est horizontal. Ce sont les candidats pour être des extrema.
3. Parfois, le statut de minimum ou maximum est évident (par exemple pour une fonction positive ou composée de sin/cos)
4. Sinon, voir le point suivant.
5. Pour l'étude sur la frontière que l'on a exclu, voir le TD

III.2 Matrice hessienne

III.2.1 Définition, calcul pratique

La matrice hessienne se calcule en un point bien défini. Même si c'est un (x_0, y_0) noté formellement (avec des lettres). C'est une matrice symétrique réelle, dont les coefficients sont donnés par les dérivées partielles secondes (on peut en calculer 4 différentes, mais le théorème de Schwartz assure que les coefficients non diagonaux sont égaux).

III.2.2 Utilité

On se place en $X_0 = (x_0, y_0)$ fixé et on note H_0 la matrice hessienne de f en ce point. Alors la formule de Taylor à l'ordre 2 peut s'écrire.

$$f(X) - f(X_0) - \langle \overrightarrow{grad} f(X_0), X - X_0 \rangle = {}^T(X - X_0)H_0(X - X_0) + \dots$$

et donc le signe de $f(X) - f(X_0) - \langle \overrightarrow{grad} f(X_0), X - X_0 \rangle$ est le même que celui de ${}^T(X - X_0)H_0(X - X_0)$.

III.2.3 Conséquences

1. Dans le cas général, le signe de ${}^T(X - X_0)H_0(X - X_0)$ donne la position de la surface représentative de f par rapport au plan tangent en X_0 Comme d'habitude, un signe positif indique au dessus
2. Dans le cas particulier d'un point critique, le terme de gradient s'annule et on a donc $f(X) - f(X_0)$ qui est du signe de ${}^T(X - X_0)H_0(X - X_0)$, donc on peut faire l'étude d'un éventuel extrema (signe positif, on a $f(X) - f(X_0) \geqslant 0$ et donc présence d'un minimum en X_0, par exemple).

III.3 Etude des extrema

III.3.1 Principe

On réduit la matrice Hessienne comme s'il s'agissait d'une matrice d'un équation de conique et on trouve ${}^T(X-X_0)H_0(X-X_0) = \lambda x'^2 + \mu y'^2$ où λ et μ sont les valeurs propres de H_0. On peut en déduire

— SI les deux valeurs propres de H_0 sont strictement positives ou l'un est strictement positive et l'autre nulle, alors f possède un minimum local en X_0

— SI les deux valeurs propres de H_0 sont strictement négatives ou l'un est strictement négatives et l'autre nulle, alors f possède un maximum local en X_0

— SI les deux valeurs propres de H_0 sont de signes opposés et non nulles, alors f possède un point selle (ou point col) en X_0, c'est à dire ni minimum ni maximum

— Si les deux valeurs propres sont nulles (ie $H_0 = 0$), on ne peut pas conclure avec notre formule à l'ordre 2. Cas extrêmement improbable en pratique.

Théorème 1
Soit $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$ où U est un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$. Soit $X_0 \in U$ un point critique de f.

Notons également H la matrice hessienne de f au point X_0.

1. Si $\det(H) > 0$ alors f possède un extremum local en X_0.
   (a) si $\mathrm{tr}(H) > 0$, il s'agit d'un minimum.
   (b) si $\mathrm{tr}(H) < 0$, il s'agit d'un maximum.
2. Si $\det(H) < 0$, alors f n'a ni minimum local ni maximum local en X_0 (point col).
3. Si $\det(H) = 0$, il faut calculer les valeurs propres.