Devoir surveillé n°6

Durée : 4H. Calculatrices interdites. **Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction et la propreté : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.**

Lisez l'énoncé attentivement et en entier **AVANT** de commencer le devoir.

Exercice 1 (Cours)

1. Donner un exemple de trois vecteurs coplanaires dans l'espace tels qu'ils soient deux à deux non-colinéaires.
2. Effectuer la division euclidienne de $X^3 - 2X + 1$ par $X - 2$.
3. Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)}$.
4. Donner le degré et le coefficient dominant de $(X+1)^4 - (X-1)^4$.
5. Donner un exemple d'une suite non monotone mais convergente et un exemple d'une suite bornée qui ne converge pas.
6. Soit $\mathcal{P} : x + y + z = 0$ un plan dans l'espace et $M : \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calculer les coordonnées du projeté orthogonal de M sur $\mathcal{P}$ ainsi que la distance de M à $\mathcal{P}$

Exercice 2

On se place dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\mathcal{R} : (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Soient A le point de coordonnées $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, la droite $\mathcal{D}$ de représentation cartésienne $\begin{cases} -3x + y + 2z = 7 \\ -3x - y + z = -1 \end{cases}$, et la droite $\mathcal{D}' = A + \text{Vect}(\vec{v})$ où $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Trouver un point et un vecteur directeur de $\mathcal{D}$. On notera $\vec{u}$ le vecteur trouvé.
2. On pose $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Donner une équation de $\mathcal{P} = A + \text{Vect}(\vec{w}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$.
3. Montrer que $\mathcal{D}' \subset \mathcal{P}$ et que l'intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ est un point (sans calculer les coordonnées de ce point).
4. Calculer les coordonnées du point d'intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$. On le note B.
5. On pose $\mathcal{D}'' = B + \text{Vect}(\vec{w})$. Montrer que $\mathcal{D}''$ est perpendiculaire à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.
6. Calculer les coordonnées du point d'intersection de de $\mathcal{D}''$ et $\mathcal{D}$.
7. Dans le cas général de deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$, quelle condition doivent vérifier leurs vecteurs directeurs pour que l'on puisse trouver une droite $\mathcal{D}''$ perpendiculaire à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ de cette manière ?

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le Père Noël soit distribuer n cadeaux distincts à n enfants. Il y a alors $n!$ manières d'effectuer cette distribution (fait admis pour l'instant), mais une seule répond au souhait de chaque enfant. On note D_n le nombre de distributions où aucun enfant n'obtient le cadeau qu'il souhaitait.

Partie I

1. Dans cette question seulement, on pose $n = 3$. On note c_1, c_2, c_3 les 3 cadeaux. Ecrire toutes les distributions possibles des 3 cadeaux.
2. Justifier que $D_1 = 0, D_2 = 1$ et $D_3 = 2$.
3. Un raisonnement de dénombrement (que l'on ne demande pas) permet de montrer que pour tout $n \geqslant 1$ on a
$$D_{n+2} = (n+1)(D_{n+1} + D_n)$$
Calculer D_4 et D_5.
4. Pour $n \geqslant 1$, on pose $v_n = D_{n+1} - (n+1)D_n$. Montrer que la suite (v_n) est géométrique.
5. En déduire que $\forall n \geqslant 1 \ D_{n+1} = (n+1)D_n + (-1)^{n+1}$.
6. Etablir que $\forall n \geqslant 1 \ D_n = n! \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

Partie II

Si on suppose que les distributions de cadeaux sont équiprobables, le Père Noël se trompe en ne distribuant le bon cadeau à aucun enfant avec une probabilité $p_n = \frac{D_n}{n!}$. On souhaite étudier la limite de (p_n) quand $n \to +\infty$.

Pour $n \geqslant 0$ on pose $f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^x \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-x)^k}{k!} \right) \end{array} \right.$.

1. Quel est le lien entre f_n et p_n ? Quelle est le but de cette partie, exprimer avec f_n ?
2. Soient $g_0, \dots, g_n$ des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. **Démontrer** que $\sum_{k=0}^{n} g_k$ est dérivable et calculer sa dérivée.
3. Donner le domaine de dérivabilité de f_n et simplifier l'expression de f_n'. On pourra écrire les sommes avec des $\dots$ au besoin.
4. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$ on a $|f_n'(x)| \leqslant \frac{e}{n!}$.
5. On rappelle que pour $a, b \in \mathbb{R}$ on a $f_n(b) - f_n(a) = \int_a^b f_n'(t)\mathrm{d}t$. Montrer que $|f_n(1) - f_n(0)| \leqslant \frac{e}{n!}$.
6. Conclure sur la limite de (p_n).
7. Trouver un nombre rationnel qui soit une approximation de $\lim_{+\infty} p_n$ à 10^{-2} près.

Exercice 4
Dans cet exercice nous allons étudier la suite définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} = \frac{2u_n+3}{u_n+4}$

Les parties I, II, et III sont indépendantes. Les parties IV et V utilisent les résultats et notations des parties précédentes.

Partie I

Commençons par prouver que la suite (u_n) est bien définie.

1. Calculer u_1, u_2.
2. On pose $f : \left\{ \begin{array}{ccc} D & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{2x+3}{x+4} \end{array} \right.$.

   Donner le domaine de définition de f et montrer que $2 \notin \mathrm{Im}(f)$.
3. Donner un tableau de variations complet de f, incluant les limites aux bornes.
4. Question subsidiaire[1] : montrer que f est une bijection de $]-4, +\infty[$ dans un intervalle à préciser et expliciter sa réciproque.
5. Montrer que si $x > 0$ alors $f(x) > 0$.
6. En déduire que la suite (u_n) est bien définie, c'est à dire que u_n existe bien pour tout n.
7. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, il existe un couple **d'entiers** naturels (p_n, q_n) tels que $u_n = \frac{p_n}{q_n}$.

   Vous préciserez les valeurs de p_0, q_0, p_1, q_1 ainsi que le lien entre p_{n+1}, q_{n+1} et p_n, q_n.

Partie II

On définit les suites (a_n) et (b_n) par $a_0 = 1,\ b_0 = 2$ et pour tout n entier naturel $a_{n+1} = 2a_n + 3b_n,\ b_{n+1} = a_n + 4b_n$.

1. Calculer a_1, b_1, a_2, b_2
2. Montrer que a_n et b_n sont des entiers naturels strictement positifs pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Donner l'expression explicite (sans relation de récurrence) de la suite $(b_n - a_n)$. Justifier !
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $d \in \mathbb{N}$ est un diviseur commun à a_n et b_n. Montrer que $d = 1$.

On vient de démontrer que les suites $(a_n), (b_n)$ ainsi construites définissent des nombres sans facteurs communs, ou encore que la fraction $\frac{a_n}{b_n}$ est réduite pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Ceci règle un problème subtil de la partie précédente...

Partie III

Soit $(v_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite vérifiant la relation $(E) : \forall n \in \mathbb{N}\ v_{n+2} = 6v_{n+1} - 5v_n$.

1. Exprimer v_n en fonction de l'entier n et de v_0, v_1.
2. Donner un équivalent de v_n quand n tend vers l'infini.

1. sans rapport avec le but actuel

Partie IV

On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ et $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

De plus, pour $n \in \mathbb{N}$, on pose également $X_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$ (cf. partie I)

1. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.
2. Trouver deux réels α, β tels que $A^2 = \alpha A + \beta I_2$.
3. Calculer $(A^2 - \alpha A - \beta I_2)X_n$ de deux manière et en déduire que les suites $(p_n)_n$ et $(q_n)_n$ vérifient la relation (E) de la partie III.
4. Donner les expressions en fonction de n de p_n et q_n. En déduire u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
5. Calculer la limite de (u_n).

Partie V

Nous allons calculer l'expression de (u_n) par un autre procédé.

1. Résoudre l'équation $f(l) = l$ d'inconnue $l \in D$. On note $l_1 < l_2$ les solutions.
2. Pour x convenable (à préciser), simplifier $\frac{f(x)-l_1}{f(x)-l_2}$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \frac{u_n - l_1}{u_n - l_2}$. Montrer que la suite $(v_n)_n$ est géométrique.
4. Retrouver l'expression de u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5

Dans l'espace munit de $\mathcal{R} : (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ un repère orthonormé direct, on considère les plans $\mathcal{P}$ d'équation $x + z = 0$ et $\mathcal{Q}$ d'équation $x + y + z - 3 = 0$.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on considère le point $N(t)$ de coordonnées $\begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \\ c(t) \end{pmatrix}$ avec $\begin{cases} a(t) = \frac{\cos t}{\sqrt{2}} \\ b(t) = \sin t \\ c(t) = -\frac{\cos t}{\sqrt{2}} \end{cases}$

1. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, le point $N(t)$ appartient au plan $\mathcal{P}$.
2. Calculer pour $t \in \mathbb{R}$ la quantité $a(t)^2 + b(t)^2 + c(t)^2$. En déduire que $N(t)$ appartient à un cercle dont on précisera le centre et le rayon.
3. Montrer que les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ ne sont ni confondus ni parallèles.
4. Déterminer une représentation paramétrique de $\mathcal{D}$, la droite intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$.
5. Un point $N(t)$ peut-il appartenir à $\mathcal{D}$? Si oui, préciser pour quelle(s) valeur(s) de t.
6. Rappeler l'interprétation géométrique de $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$ et $|\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})|$ pour $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trois vecteurs de l'espace.
7. Trouver un point A et une base $(\vec{u}, \vec{v})$ de $\mathcal{Q}$.
8. Montrer, par des considérations géométriques, que la distance d'un point M à $\mathcal{Q}$ est donnée par $\frac{|\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v})|}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}$.
9. Si on note $\mathcal{D} = B + \mathrm{Vect}(\vec{w})$, montrer que la distance d'un point M à $\mathcal{D}$ est donnée par $\frac{\|\overrightarrow{BM} \wedge \vec{w}\|}{\|\vec{w}\|}$.
10. Calculer la distance de $N(t)$ à $\mathcal{Q}$ ainsi que la distance de $N(t)$ à $\mathcal{D}$.
11. Montrer le rapport entre ces deux distances est constant.
12. Soit $t \in \mathbb{R}$.
    (a) Montrer que $e^{it} + e^{i(t + \frac{2\pi}{3})} + e^{i(t - \frac{2\pi}{3})} = 0$
    (b) Calculer les coordonnées de l'isobarycentre (centre de gravité) des points $N(t)$, $N\left(t + \frac{2\pi}{3}\right)$ et $N\left(t - \frac{2\pi}{3}\right)$.
    (c) En déduire la nature du triangle de sommets $N(t)$, $N\left(t + \frac{2\pi}{3}\right)$ et $N\left(t - \frac{2\pi}{3}\right)$.