Tous les espaces sont de dimension finie dans cette fiche.

Vocabulaire

On croise différents types d'objets en algèbre linéaire, et le vocabulaire qui s'y rapporte est précis. Compléter le tableau suivant par des ✓ou ✗ suivant que le mot peut s'appliquer ou non au type d'objet correspondant.

	Matrice	famille	espace vectoriel	application linéaire
Rang				
Trace				
Dimension				
Libre				
Déterminant				

Matrices

On considère un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n, $(u_1, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs de E, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base de E. Soit également $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Suivant la colonne du tableau à suivre, on considère que $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n)$ ou alors $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$. Compléter les deux colonnes vides (éventuellement par ✗) par l'interprétation pour l'objet correspondant à la colonne de chaque propriété de la matrice M.

Pour la matrice M	Pour la famille $(u_1, \dots u_n)$	Pour l'application f
$M \in GL_n(\mathbb{K})$		
$\mathrm{rg}(M)$		
$\det(M)$		
$\mathrm{tr}(M)$		
$\begin{pmatrix} x_1 \\ \\ x_n \end{pmatrix} \in \ker(M)$		
M^2		

Dimensions usuelles

Soit n un entier $\geqslant 1$. On considère également $E_1, \dots, E_r$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions respectives $n_1, \dots, n_r$.

Compléter le tableau suivant en précisant pour les 4 premières lignes la base canonique correspondante. Laisser les 3 dernières lignes pour plus tard

Espace	dimension
$\mathbb{C}$ (en tant que $\mathbb{R}$-ev)	
$\mathbb{K}^n$	
$\mathbb{K}_n[X]$	
$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$	
$E_1 \oplus E_2$	
$E_1 + E_2$ (Grassman)	
$\mathcal{L}(E_1, E_2)$	
$\mathcal{L}(E_1)$	
$E_1 \times E_2$	
$\prod_{i=1}^{r} E_i$	
$\bigoplus_{i=1}^{r} E_i$	

Résultats théoriques sur la dimension

Théorème 1
Si E est de dimension n alors une famille libre de E possède au maximum n éléments et une famille génératrice de E possède au minimum n éléments.

Théorème 2
Si E est de dimension n et F est un sous-espace de E alors $\dim(F) \leqslant n$ et $\dim(F) = n \iff F = E$.

Théorème 3
Si E est de dimension n et F est un sous-espace de E alors on peut construire une base de E qui débute par une base de F (c'est une application du théorème de la base incomplète).

Rappels sur les applications linéaires

Théorème 4
Soient E, F deux espaces vectoriels (de dimension finie).

Tous les résultats suivants s'appliquent encore dans le cas $E = F$.

— Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est bijective alors $\dim(F) = \dim(E)$.

- Si $\dim(F) = \dim(E)$ et $f \in \mathcal{L}(E,F)$ alors on a (f est injective $\iff$ f est surjective)
- $f \in \mathcal{L}(E,F)$ est bijective ssi l'image par f d'une base de E est une base de F

Théorème 5 (Théorème du rang)
Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ avec E de dimension finie.
- (Version isomorphisme) Si H est un supplémentaire de $\ker(f)$ dans E alors $f_{|H} : H \to \mathrm{Im}(f)$ est bijective.
- (Version dimension) $\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \mathrm{rg}(f)$.
- (Conséquence) Si f est injective et G est un sous-espace de E alors $\dim(f(G)) = \dim(G)$.
- (Majoration du rang) $\mathrm{rg}(f) \leqslant \dim(E)$ et $\mathrm{rg}(f) \leqslant \dim(F)$.