Espaces vectoriels

Antoine Louatron

Table des matières

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désignera un corps qui sera pour nous $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Espaces vectoriels

I.1 K-espace vectoriel

I.1.1 Exemple

Dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ considérés comme des ensembles de vecteurs (on munit le plan et l'espace d'un ROND et on identifie vecteurs et coordonnées) on a les opérations suivantes :

— Somme de vecteurs : $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ c+d \end{pmatrix}$. On a déjà vu qu'alors + est associative, commutative, possède un neutre (le vecteur nul) et tout vecteur possède un opposé.

— Multiplication par un scalaire : $\lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a \\ \lambda b \end{pmatrix}$.

I.1.2 Exemple

L'ensemble des polynômes, celui des solutions d'une EDL homogène, certains ensembles de fonctions peuvent également être munit d'une multiplication par un scalaire.

I.1.3 Définition

Soit E un ensemble munit d'une opération notée + $\left\{ \begin{array}{ccc} E \times E & \to & E \\ (x,y) & \mapsto & x+y \end{array} \right.$ et d'une loi "externe" définie par

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times E & \to & E \\ (\lambda, x) & \mapsto & \lambda.x \end{array} \right.$$

L'hypothèse cachée ici est que le résultat de l'opération est encore dans E.

On dit que E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ssi

1. *+ est associative ie $\forall x, y, z \in E$ $(x+y)+z = x+(y+z)$.*
2. *+ possède un neutre noté 0_E tel que $\forall x \in E$ $0_E + x = x + 0_E$*
3. *+ est commutative ie $\forall x, y \in E$ $x+y = y+x$*
4. *Tout $x \in E$ possède un opposé noté $-x$ tel que $x + (-x) = (-x) + x = 0_E$.*
5. *$\forall x, y \in E \forall \lambda \in \mathbb{K}$ $\lambda.(x+y) = \lambda.x + \lambda.y$*
6. *$\forall x \in E \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$ $(\lambda+\mu).x = \lambda.x + \mu.x$*
7. *$\forall x \in E \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$ $(\lambda\mu).x = \lambda.(\mu.x)$*
8. *$\forall x \in E$ $1_{\mathbb{K}}.x = x$.*

Les éléments de E sont alors appelés vecteurs (et 0_E est le vecteur nul) et ceux de $\mathbb{K}$ scalaires. La loi + est l'addition de l'espace vectoriel et la loi . est la multiplication par un scalaire.

I.1.4 Notation

1. Bien que les éléments de E soient appelés vecteurs, on ne les munit pas de flèches. On réserve celles-ci aux vecteurs du plan et de l'espace.
2. On écrira extrêmement souvent $\mathbb{K}$-ev en lieu et place de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

I.1.5 Définition

Soit E un espace vectoriel et $x_1, \ldots, x_n \in E^n$. Une combinaison linéaire de $x_1, \ldots, x_n$ est un vecteur de la forme $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ où $\lambda_i \in \mathbb{K}$.

C'est bien un vecteur de E car les deux lois sont à valeurs dans E. La notation $\sum$ est justifiée par le fait que + est associative.

Explication C'est l'expression générale qu'on peut obtenir en utilisant les deux lois de E sur n vecteurs. On verra plus tard des conditions particulières d'existence et d'unicité de telles expressions.

I.1.6 Proposition

Soit E un $\mathbb{K}$-ev.

1. *Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in E$. Alors $\lambda.x = 0 \iff \lambda = 0$ ou $x = 0$.*
2. *Soit $x \in E$. Alors $-x = (-1).x$.*

Preuve.

1. — On à d'abord $0.x = (0+0).x = 0.x + 0.x$ (propriété 6). Comme on peut soustraire $0.x$ on obtient $0.x = 0_E$.

   De plus $\lambda.0 = \lambda.0 + \lambda.0$ (propriété 5 cette fois) et donc de la même manière $\lambda.0 = 0_E$.

   — On suppose maintenant $\lambda.x = 0$. Si on a de plus $\lambda \neq 0$ alors λ admet un inverse dans $\mathbb{K}$ et on a $\lambda^{-1}.0_E = 0_E = \lambda^{-1}.(\lambda.x) = (\lambda^{-1}\lambda).x$ (propriété 3) et comme $1.x = x$ on obtient $x = 0_E$.
2. On a maintenant $(1_{\mathbb{K}} + (-1_{\mathbb{K}})).x = x + (-1).x = 0_E$ donc $-x = (-1).x$. ■

Explication Il est important de bien voir que les propriétés qu'on impose sur les vecteurs d'un $\mathbb{K}$-ev sont des propriétés "naturelles" des vecteurs classiques du plan et de l'espace, et il est vraiment important d'essayer de se représenter les propriétés des ev dans le plan est l'espace.

I.2 Exemples

I.2.1 Corps

1. $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-ev.
2. Tout $\mathbb{C}$-ev est aussi un $\mathbb{R}$-ev.
3. $\mathbb{R}$ n'est pas un $\mathbb{C}$-ev car la multiplication scalaire n'est pas interne (à valeurs dans $\mathbb{R}$).

I.2.2 Exemple
Pour $n \geqslant 1$ un entier, $\mathbb{K}^n$ peut être munit d'une structure de $\mathbb{K}$-ev : on effectue les sommes et les produits par un scalaire coefficient par coefficient.

Cas particuliers : $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ où les vecteurs sont souvent notés avec des flèches.

I.2.3 Exemple
$\mathbb{K}[X]$ est un $\mathbb{K}$-ev.

I.2.4 Exemple
$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-ev.

I.2.5 Proposition (Applications)
Soit X un ensemble et E un $\mathbb{K}$-ev. On munit l'ensemble $E^X = \mathcal{F}(X,E)$ (l'ensemble des fonctions de X dans E) de deux lois. Si $f, g \in \mathcal{F}(X,E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ on pose

$$f+g : \left\{ \begin{array}{ccc} X & \to & E \\ x & \mapsto & f(x)+g(x) \end{array} \right. \quad \text{et } \lambda.f : \left\{ \begin{array}{ccc} X & \to & E \\ x & \mapsto & \lambda.f(x) \end{array} \right.$$

Ces deux lois font de E^X un $\mathbb{K}$-ev.

Preuve.
Soient $f, g, h \in E^X$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $x \in X$. On alors

— $(f+(g+h))(x) = ((f+g)+h)(x)$ par associativité de $+$ dans E.

— La commutativité de $+$ provient de la même façon de la commutativité dans E.

— La fonction $x \mapsto 0_E$ est clairement neutre pour $+$.

— La fonction $x \mapsto -f(x)$ est alors l'opposé de f. ■

La vérification des propriétés de la loi externe n'est pas plus difficile. ■

I.2.6 Exemple

1. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Alors $\mathbb{R}^I$ est un $\mathbb{R}$-ev.
2. L'ensemble des suites à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{K}$-ev.

I.3 Sous-espaces vectoriels

I.3.1 Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-ev et F une partie non vide de E. On dit que F est un sous-$\mathbb{K}$-espace vectoriel de E (abrégé sous-ev ou sev) si F est un $\mathbb{K}$-ev pour les lois de E restreintes à F (en particulier il est stable par ces lois).

I.3.2 Exemple

Un cercle n'est pas un sous-espace de $\mathbb{R}^2$.

Dessin avec un droite ne passant pas par O.

I.3.3 Proposition

Soit $F \subset E$ un $\mathbb{K}$-ev. Alors F est un sev de E

- $\iff$ *$0_E \in F$ et F est stable par combinaison linéaire, ie $\forall x, y \in F \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}\ \lambda x + \mu y \in F$.*
- $\iff$ *$0_E \in F$ et F est stable par addition ($\forall x, y \in F\ x + y \in F$) et F est stable par multiplication par un scalaire ($\forall \lambda \in \mathbb{K} \forall x \in F\ \lambda x \in F$).*

Preuve.

On va prouver seulement la seconde équivalence. La première n'en est qu'une forme concise.

- Si F est un sous-espace vectoriel alors 0_E est le neutre pour $+$ dans F en particulier $0_E \in F$. De plus, les lois de E restreintes à F sont à valeurs dans F donc F est stable par la multiplication scalaire et l'addition.
- Réciproquement, si $F \subset E$ contient 0_E et qu'il est stable par les lois de E, montrons que ces lois font de F un $\mathbb{K}$-ev.
  - F contient 0_E, est stable par $+$ et par passage à l'opposé (multiplication par $-1 \in \mathbb{K}$). Ainsi $+$ qui est trivialement commutative et associative par restriction possède également un neutre DANS F et tout élément de F possède un opposé DANS F.
  - Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $x, y \in F$. En particulier $x, y \in E$ et donc

$$(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x,\ \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y,\ \lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x \text{ et } 1x = x.$$

  Ainsi F est un $\mathbb{K}$-ev.

I.3.4 Remarque

Ce résultat est fondamental pour la pratique car on pourra souvent se ramener à la preuve que untel est sev de untel plutôt que de revenir à la définition. C'est en effet beaucoup plus rapide de montrer une simple stabilité par c.l. que de re-prouver les 8 propriétés de la définition.

I.3.5 Exemple

Soit E un $\mathbb{K}$-ev. Alors E possède au moins deux sev qui sont E et $\{0_E\}$.

I.3.6 Exemple

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $(a, b) \neq (0, 0)$. On pose $\mathcal{D}_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | ax + by + c = 0\}$. A quel condition sur $c \in \mathbb{R}$ l'ensemble D_c est une sev de $\mathbb{R}^2$? La droite doit passer par 0.
2. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. L'ensemble $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ ax + by + cz = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Interprétation géométrique ?
3. On rappelle que $\mathbb{K}_n[X]$ est l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré au plus n. Alors $\mathbb{K}_n[X]$ est un sev de $K[X]$.
4. L'ensemble des suites réelles bornées est un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. L'ensemble des suites bornées est un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. En effet $\lambda O(1) + \mu O(1) \underset{+\infty}{=} O(1)$.

Explication On fait de la géométrie des vecteurs, qui sont tous censés être d'origine 0, donc tous nos objets géométriques (droites, plans) passent par 0. De plus les ev et sev sont des objets "droits" et pas "courbés".

En particulier les droites géométriques qui sont des sev sont de la forme $O + \mathrm{Vect}(\vec{u}) = \mathrm{Vect}(\vec{u})$, ce qui justifie *a posteriori* la notation.

I.3.7 M-exemple

Les solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 ou 2 à coefficients constants forment un sev de $\mathcal{C}^\infty(I,\mathbb{R})$.

I.3.8 Exercice

1. *Montrer que $\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-ev.*
2. *Montrer que l'ensemble des suites réelles convergentes est un $\mathbb{R}$-ev.*

I.3.9 Théorème

Soit E un $\mathbb{K}$-ev. Toute intersection (éventuellement infinie) de sev de E est un sev de E.

Preuve.
Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de sev de E. On pose $F = \bigcap\limits_{i\in I} F_i = \{x \in E | \forall i \in I\ x \in F_i\}$.

Comme $\forall i \in I\ 0_E \in F_i$ (ce sont des sev) on a $0_E \in F$. Soient maintenant $x, y \in F$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Comme $\forall i \in I\ x, y \in F_i$ on a $\forall i \in I\ \lambda x + \mu y \in F_i$ et donc F est stable par combinaison linéaire.

Ce deux faits font de F un sev de E. ∎

I.3.10 ATTENTION

La réunion de deux sev n'est en général par un sev. Se représenter la réunion de deux droites distinctes du plan passant par 0 : ce n'est ni une droite ni un plan.

I.4 Résumé des exemples

I.4.1 $\mathbb{R}$-espaces vectoriels

Les ensembles suivants sont des $\mathbb{R}$-ev : $\mathbb{R}^n$ pour $n \geqslant 1$, $\mathbb{C}^n$ pour $n \geqslant 1$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$, $\mathbb{R}_n[X]$, $\mathbb{C}_n[X]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$, tous les $\mathbb{R}^I$, $\mathbb{R}^\mathbb{N}$, $\mathbb{C}^I, \mathbb{C}^\mathbb{N}$, les droites du plan passant par l'origine, les plans et les droites de l'espace passant par l'origine, les ensembles $\mathcal{C}^k(I,\mathbb{R})$

I.4.2 $\mathbb{C}$-ev

Les ensembles suivants sont des $\mathbb{C}$-ev : $\mathbb{C}^n, \mathbb{C}[X], \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$, les suites et fonctions complexes ($\mathbb{C}^I$ et $\mathbb{C}^\mathbb{N}$), les fonctions $\mathcal{C}^k(I,\mathbb{C})$.

II Bases

II.1 Sev engendrés

II.1.1 Définition-Proposition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace-vectoriel et $e_1, \dots, e_n \in E$. L'espace vectoriel engendré par $e_1, \dots, e_n$ est $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n) = \{\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n | \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}\}$.

C'est un sous-espace de E et tout espace G qui contient $e_1, \dots, e_n$ vérifie $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n) \subset G$. *(on dit que l'espace engendré est le plus petit espace au sens de l'inclusion qui contienne les vecteurs $e_1, \dots, e_n$).*

Preuve.
Posons $F = \{\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n | \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}\}$. Alors F contient 0_E (prendre $\lambda_i = 0_\mathbb{K}$) et est stable par c.l. (regrouper les sommes et factoriser par les vecteurs) donc est un sev de E.

Soit maintenant un sous-espace G de E qui contienne $e_1, \dots, e_n$. Alors, toute combinaison linéaire de la forme $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$ (avec les $\lambda_i \in \mathbb{K}$) est encore dans G par stabilité par c.l. et donc $F \subset G$. ∎

II.1.2 M-Ex

Si $u \in E$ alors en particulier $\mathrm{Vect}(u) = \{\lambda.u | \lambda \in \mathbb{K}\}$ que l'on note $\mathbb{K}u$. C'est la droite vectorielle engendrée (ou dirigée) par u. On parlera de droite y compris quand u est un polynôme ou une fonction...

II.1.3 Définition
Soit E un $\mathbb{K}$-ev. On dit que $(e_1,\dots,e_n)$ est une famille génératrice de E (ou engendre E) ssi $E = \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_n)$, c'est à dire si tous les éléments de E peuvent s'écrire comme combinaison linéaire des e_i, ou encore

$$\forall u \in E\ \exists(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{K}^n\ u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$$

II.1.4 Exemple

1. $\mathbb{R}^2 = \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix})$.
2. La droite d'équation $ax+by=0$ est aussi $\mathrm{Vect}(\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix})$.
3. $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix})$.
4. $\mathbb{R}_n[X] = \mathrm{Vect}(1, X, X^2, \dots, X^n)$.

II.1.5 Exemple
Soient u, v non colinéaires dans $\mathbb{R}^2$. Alors ils engendrent un plan et donc n'engendrent pas $\mathbb{R}^3$.

II.1.6 Solutions d'un système linéaire homogène

L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène est toujours un sev de $\mathbb{R}^p$ où p est le nombre d'inconnues. Il y a exactement $p-r$ vecteurs notés dans le symbole Vect, où r est le rang du système.

II.1.7 Exemple
On considère l'équation différentielle complexe $ay'' + by' + cy = 0$ (discriminant non nul). Alors l'ensemble de ses solutions est $\mathrm{Vect}(x \mapsto e^{r_1 x}, x \mapsto e^{r_2 x})$ où r_1 et r_2 sont les racines de l'équation caractéristique.

II.1.8 Méthode

Pour prouver que F est un $\mathbb{K}$-ev on pourra :

1. prouver que c'est un sev d'un $\mathbb{K}$-ev connu.
2. exhiber des vecteurs $e_1,\dots,e_n$ tels que $F = \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_n)$. Exemple : $2x+y-z=0$ dans l'espace.

II.1.9 Proposition
Si F, F' sont deux sev de E un $\mathbb{K}$-ev et $F = Vect(f_1, \dots f_n)$ alors $F \subset F'$ ssi $f_1, \dots f_n \in F'$.

Preuve.
En effet, F est le plus petit (au sens de l'inclusion) sous-espace de E contenant $f_1, \dots f_n$ (ceci prouve l'implication non triviale). ∎

II.1.10 Proposition (Modification de famille génératrice)
Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $(e_1,\dots,e_n)$ une famille de vecteurs de E. On note $F = \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_n)$.

1. *On ne change pas F en échangeant deux vecteurs.*
2. *Si $e_1 = 0_E$ alors $F = \mathrm{Vect}(e_2,\dots,e_n)$ (en combinant ces deux points, on peut donc retirer tout vecteur nul d'une famille génératrice).*
3. *On ne change pas F en effectuant une opération élémentaire $e_i \leftarrow \lambda e_i$ ($\lambda \in \mathbb{K}^*$) ou $e_i \leftarrow e_i + \lambda e_j$ ($i \neq j$). On peut donc remplacer un vecteur par une combinaison linéaire des e_i à condition que le coefficient du vecteur que l'on remplace soit non nul.*

Preuve.
Les deux premiers points sont triviaux (regarder les cl. qui composent F).

On change e_i en e'_i par une opération élémentaire et on note F' l'espace vectoriel nouvellement engendré.

Alors $e_1, \dots, e_n$ (sauf e_i) sont dans F' par définition. De plus $e_i = \frac{1}{\lambda} e'_i$ ou $e_i = e_i - \lambda e_j$ (suivant l'opération effectuée) et donc $e_i \in F'$. Ainsi $F \subset F'$ d'après la proposition précédente.

De plus on a clairement $e'_i \in F$ et donc $F' \subset F$ d'après la proposition précédente.

Ainsi $F = F'$. ∎

II.1.11 Corollaire

On peut ôter un vecteur combinaison linéaire des autres dans une famille génératrice en conservant le caractère générateur. On ne modifie pas l'espace engendré par une famille de vecteurs en lui faisant subir une ou plusieurs opérations élémentaires.

II.1.12 Exemple

Réduction dans $\mathbb{R}^3$ de la famille $v_1 : \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, v_2 : \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}, v_3 : \begin{pmatrix}1\\5\\9\end{pmatrix}, v_4 : \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$. On écrit les vecteurs en colonnes et on note à chaque étape les opérations effectuées sur les colonnes :

$$\begin{array}{cccc|cccc|cccc|cccc|cccc|ccc|}
1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 2 & 5 & 1 & 1 & 0 & 5 & 1 & 1 & 0 & 5 & 1 & 1 & 0 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 2 & 9 & 2 & 0 & 0 & 9 & 2 & 0 & 0 & 9 & 2 & 0 & 0 & 9 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1
\end{array}$$

$$C_2 <- C_2 - C_1 - C_4 \quad C_1 <- C_1 - C_2 \quad \begin{matrix} C_4 <- C_4 - C_1 \\ C_4 <- -\frac{1}{2} C_4 \end{matrix} \quad C_3 <- C_3 - 5C_1 - C_2 - 9C_4$$

II.1.13 Exemple

— Réduire $\mathrm{Vect}(1, X^2, (X+1)^2)$.

— On prend e_1, e_2, e_3 une base de $\mathbb{R}^3$. Montrer que $F = \mathrm{Vect}(e_1 + e_2, e_2 + e_3, e_1 - e_3)$ est inclus dans un plan de l'espace.

II.2 Familles libres

II.2.1 Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $(e_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ une famille de vecteurs de E.

1. *On dit que $(e_i)_i$ est liée s'il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ une famille de scalaire non tous nuls tels que*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0$$

C'est à dire qu'il existe une combinaison linéaire des e_i qui soit nulle sans que tous les coefficients le soit. On dit aussi que les e_i sont linéairement dépendant.

Ex : La famille $\left(\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}\right)$ est liée dans $\mathbb{R}^2$. En effet le troisième vecteur est la somme des deux premiers.

2. *Si $(e_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ n'est pas liée, elle est dite libre (ou linéairement indépendante). C'est à dire que pour toute famille $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$*

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i e_i = 0 \Rightarrow \lambda_1 = ... = \lambda_n = 0.$$

En particulier une famille libre ne contient jamais le vecteur nul.

Explication Il faut comparer la situation d'une famille libre/liée à un système linéaire dont on peut éliminer une équation ou non.

II.2.2 M-Remarque

Une famille est liée ssi un de ses vecteurs est une combinaison linéaire des autres : on prend un vecteur de coefficient non nul et on l'isole...

Donc une famille est libre ssi aucun de ses vecteurs n'est une combinaison linéaire des autres.

II.2.3 Exemple

1. Les vecteurs $e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ forment une famille libre de $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que $\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\4\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$ forment une famille libre de $\mathbb{R}^3$.

II.2.4 Définition

Dans E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1. *Deux vecteurs liés sont dits colinéaires.*
2. *Quand trois vecteurs forment une famille liée, ils sont dits coplanaires*

II.2.5 Exemple

1. On prendra garde au fait que la liberté d'un famille dépend du corps des scalaires. Par exemple $(1, i)$ est libre dans $\mathbb{C}$ considéré comme $\mathbb{R}$-ev car $a + bi = 0$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ implique que $a = b = 0$.
   Mais $(1, i)$ est liée dans $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{C}$-ev car $(-i).1 + 1.i = 0$.
2. CNS pour qu'une famille de deux vecteurs du plan soit libre ?
3. Et trois vecteurs dans l'espace ?
4. La famille $(1, X, \dots, X^n)$ est libre dans $\mathbb{K}[X]$. En effet un polynôme est nul ssi tous ses coefficients sont nuls.
5. La famille $e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)$ est une famille libre de $\mathbb{K}^n$. Il suffit d'"identifier" les coefficients des vecteurs.

II.2.6 M-Exemple

Toute famille de polynômes dont les degrés sont tous différents est libre.

II.2.7 Théorème
Soit E un $\mathbb{K}$-ev

1. *Une famille qui contient le vecteur nul est liée (ie. n'est pas libre).*
2. *Si on ajoute à une famille libre un vecteur non combinaison linéaire des vecteurs de cette famille, alors la famille obtenue est encore libre.*
3. *On peut effectuer une opération élémentaire sur une famille sans changer son caractère libre ou liée (une famille libre reste libre, une famille liée reste liée).*

Preuve.

1. En effet il suffit de prendre comme coefficients dans la combinaison linéaire uniquement des 0 sauf le coefficient du vecteur nul pour prouver que la famille n'est pas libre.
2. Soit $(e_1, \dots, e_n) \in E^n$ une famille libre. Soit également e_{n+1} non combinaison linéaire des $(e_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$, c'est à dire $e_{n+1} \notin \text{Vect}(e_1, \dots e_n)$. Si on a pour une famille de scalaires $(\lambda_i)_{i \in [\![1,n+1]\!]}$, $\sum\limits_{i=1}^{n+1} \lambda_i e_i = 0$ alors deux cas se présentent
   — $\lambda_{n+1} = 0$ et on a une combinaison linéaire nulle de $e_1, \dots, e_n$ donc chacun des λ_i est nul.
   — $\lambda_{n+1} \neq 0$. Mais alors $e_{n+1} = -\frac{1}{\lambda_{n+1}} \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ ce qui n'est pas.
3. On note e'_1 l vecteur obtenu à partir de e_1 par une opération élémentaire (qui n'est pas un échange de vecteur...).
   Si la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est libre alors $e_1 \notin \text{Vect}(e_2, \dots, e_n)$ et donc e'_1 non plus (par l'absurde, sinon e'_1 l'est immédiatement). Ainsi $(e'_1, e_2, \dots, e_n)$ est libre.
   La réciproque est prouvé dès que l'on s'aperçoit que l'on peut exprimer e_1 en fonction de e'_1 par des relations similaires : $e_1 = \frac{1}{\lambda} e'_1$ ou $e_1 = e'_1 + \sum\limits_{i=2}^{n} (-\lambda_i) e_i$.

II.2.8 Méthode

Pour prouver qu'une famille est libre, on revient à la définition ou on essai de réduire la famille (opérations sur les vecteurs, c'est à dire les colonnes).

II.2.9 Exemple
Etudier le caractère libre ou lié de la famille $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

II.2.10 Remarque

1. Une famille à un vecteur est libre ssi ce vecteur est non nul.
2. Une famille contenue dans une famille libre est libre.
3. Une famille qui contient une famille liée est liée.

II.3 Bases

II.3.1 Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $(e_1,\dots,e_n)\in E^n$. On dit que E est une base ssi

$$\forall u\in E\ \exists!(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{K}^n\ u=x_1e_1+\dots+x_ne_n=\sum_{i=1}^n x_ie_i$$

.

II.3.2 Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-ev possédant une base $(e_1,\dots,e_n)$. Soit également $u\in E$. On appelle coordonnées de u dans la base $(e_1,\dots,e_n)$ l'unique famille $\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\in\mathbb{K}^n$ telle que $\sum\limits_{i=1}^n x_ie_i=u$.

Pour $k\in[\![1,n]\!]$, le scalaire x_k est la kème coordonnée de u dans $(e_1,\dots,e_n)$.

II.3.3 Proposition

Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $(e_1,\dots e_n)\in E^n$. La famille $(e_1,\dots,e_n)$ est une base de E ssi elle est libre et génératrice ssi

$$\varphi:\left\{\begin{array}{rcl}\mathbb{K}^n & \to & E\\ (\lambda_1,\dots,\lambda_n) & \mapsto & \sum_{i=1}^n\lambda_ie_i\end{array}\right.$$

est une bijection, c'est à dire que pour tout $y\in E$ (arrivé) il existe une unique famille de scalaires $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ telle que $y=\sum\limits_{i=1}^n\lambda_ie_i$.

Preuve.

— Supposons que $(e_1,\dots,e_n)$ est libre et génératrice

Soit $y\in E$. Comme $\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_n)=E$ (génératrice), il existe des scalaires $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ tels que $y=\sum\limits_{i=1}^n\lambda_ie_i$. φ est surjective.

Mais si on avait $y=\sum\limits_{i=1}^n\mu_ie_i$ alors $\sum\limits_{i=1}^n(\lambda_i-\mu_i)e_i=0_E$ par différence. Comme la famille (e_i) est libre, $\lambda_i=\mu_i$ pour tout $i\in[\![1,n]\!]$. Ceci prouve l'unicité ainsi que l'injectivité de φ.

— Supposons réciproquement que φ est bijective.

Montrons d'abord que la famille $(e_1,\dots e_n)$ est génératrice, c'est à dire que tout élément $y\in E$ est une combinaison linéaire des e_i. Or φ est surjective donc y admet au moins un antécédent $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ tel que $y=\sum\limits_{i=1}^n\lambda_ie_i$.

Montrons maintenant que la famille est libre. Supposons pour cela qu'on l'on ait une famille $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ de scalaires tels que $\sum\limits_{\lambda_ie_i}=0_E$. Mais comme $\varphi(0,\dots,0)=0_E$ et que φ est injective, $\lambda_i=0$ pour tout $i\in[\![1,n]\!]$.

II.3.4 Exemple

1. La famille $e_1=(1,0,\dots,0),e_2=(0,1,0,\dots,0),\dots,e_n=(0,\dots,0,1)$ est une base de $\mathbb{K}^n$ appelée base canonique de K^n.

   Trouver les coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ du vecteur $\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$.

2. La famille $(1,X,\dots,X^n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$ appelée base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$. Dans $\mathbb{K}_2[X]$, trouver les coordonnées dans la base canonique de X^2-X+1.

II.3.5 Exercice

Montrer que $\mathcal{B}=(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix})=(u_1,u_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

Calculer alors les coordonnées de e_1 et e_2 les deux vecteurs de la base canonique dans cette nouvelle base.

III Espaces de dimension finie

III.1 Bases incomplète

III.1.1 Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-ev. On dit que E est de dimension finie si E possède une famille génératrice finie.

III.1.2 Exemple

1. $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}_n[X]$ sont de dimension finie.
2. $\mathbb{K}[X]$ n'est pas de dimension finie (cf TD).

III.1.3 Théorème (Théorème de la base incomplète)

Soit $E \neq \{0\}$ un $\mathbb{K}$-ev de dimension fini, engendré par $e_1, \ldots, e_n$. Soit de plus $(f_1, \ldots, f_p)$ une famille libre de E. Alors on peut compléter la famille $(f_1, \ldots, f_p)$ en une base de E en lui ajoutant certains e_k.

Preuve.
On construit d'abord une famille $\mathcal{B}$ à partir de $(f_1, \ldots, f_p)$ puis on montre qu'elle est libre et génératrice. La présentation est algorithmique

Au départ on pose $\mathcal{B}_0 = (f_1, \ldots, f_p)$.

Pour chaque $k \in [\![1, n]\!]$, si e_k est indépendant linéairement de $\mathcal{B}_{k-1}$ (c'est à dire si $\mathcal{B}_{k-1} \cup \{e_k\}$ est libre, ou encore $e_k \notin \text{Vect}(\mathcal{B}_{k-1})$), alors $\mathcal{B}_k = \mathcal{B}_{k-1} \cup \{e_k\}$, sinon $\mathcal{B}_k = \mathcal{B}_{k-1}$ FinPour

On va maintenant prouver que la famille $\mathcal{B}_n$ construite ainsi est une base. Elle est libre par construction.

Pour montrer que $\mathcal{B}_n$ engendre E il suffit de montrer que tous les éléments d'une famille génératrice de E sont cl. des éléments de $\mathcal{B}_n$. On va le faire pour $(e_1, \ldots, e_n)$. Soit donc $k \in [\![1, n]\!]$ et supposons que e_k n'est pas un vecteur de $\mathcal{B}_n$ (sinon, la combinaison linéaire est triviale...). C'est qu'alors il n'a pas été ajouté à la famille $\mathcal{B}_n$ dans le passage n°k de la boucle et donc qu'il est combinaison linéaire d'éléments qui étaient déjà présent dans $\mathcal{B}_{k-1}$, donc a fortiori d'éléments de $\mathcal{B}_n$. ■

III.1.4 Corollaire

Tout espace vectoriel (différent de $\{0\}$) de dimension finie admet une base.

Preuve.
Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une famille génératrice, on applique le théorème de la base incomplète à (u) tel que $u \neq 0$ (il en existe un car $E \neq \{0\}$). ■

III.1.5 Corollaire

Soit $E \neq \{0\}$ un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie.

1. *De toute famille génératrice on peut extraire une base.*
2. *Toute famille libre peut être complétée en une base.*

III.1.6 Exercice

Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $F =$Vect$((1, -5, 7), (2, 6, 8), (3, 1, 15), (1, 11, 1))$. Trouver une base de F.

III.2 Dimension

III.2.1 Théorème

Soit $n \geqslant 1$ un entier. Dans un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie engendré par n vecteurs, une famille libre au plus n éléments, c'est à dire que toute famille de $n+1$ vecteurs est liée.

Preuve.

— Cas $n = 1$. On a $E = \text{Vect}(x)$. Prenons y_1, y_2 une famille de deux vecteurs et montrons qu'elle est liée. Si ces deux vecteurs sont non nuls (l'autre cas est trivial), on a $y_1 = \lambda_1 x$ et $y_2 = \lambda_2 x$ (avec $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$) et donc $\lambda_2 y_1 - \lambda_1 y_2 = 0_E$ est à coefficients non nuls donc (y_1, y_2) est liée.

On vient de montrer que deux vecteurs dans une même droite sont forcément colinéaires.

— Soit $n \geqslant 2$ et supposons le théorème acquis pour $n-1$ ie toute famille de n vecteurs dans un espace engendrée par $n-1$ vecteurs est liée. On pose $E = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ et $(y_1, \dots, y_{n+1}) \in E^{n+1}$. Montrons que $(y_i)_{i \in [\![1,n+1]\!]}$ est liée.

Pour cela on traduit le caractère générateur par les combinaisons linéaires $y_i = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_{i,j} e_j$ pour tout $i \in [\![1, n+1]\!]$. Deux cas se présentent :

1. $\forall i \in [\![1, n+1]\!]$ $\lambda_{i,n} = 0$. Alors $y_1, \dots, y_n \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1})$ donc $(y_1, \dots, y_n)$ est liée par hypothèse de récurrence et donc $(y_1, \dots, y_{n+1})$ aussi.
2. Au moins un des $\lambda_{i,n}$ est non nul. Quitte à échanger deux vecteurs (sans changer le caractère libre ou lié, rappelons le), on prend $\lambda_{n+1,n} \neq 0_{\mathbb{K}}$. Alors on pose pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $y'_i = y_i - \frac{\lambda_{i,n}}{\lambda_{n+1,n}} y_{n+1}$ (on élimine par opération élémentaire la composante sur e_n). Et alors $(y'_1, \dots, y'_n) \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1})$ et est donc liée. Il s'en suit que $(y'_1, \dots, y'_n, y_{n+1})$ est liée. Ainsi $(y_1, \dots, y_n, y_{n+1})$ est liée (les opérations élémentaires ne changent par le caractère libre ou lié)

Dans tous les cas $(y_1, \dots, y_{n+1})$ est liée.

— Conclusion : par récurrence, le théorème est valable pour tout $n \geqslant 1$.

Explication Il faut comparer ceci au résultat : le rang d'une matrice à n colonnes et $n+1$ lignes est au plus n, donc on peut faire apparaître au moins une ligne de 0, ce qui prouve que la famille des lignes est liée.

III.2.2 Exemple

1. Une famille libre du plan $\mathbb{R}^2$ possède au max 2 vecteurs.
2. une famille génératrice de l'espace $\mathbb{R}^3$ possède au moins 3 vecteurs.

III.2.3 Théorème

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. Alors toutes les bases de E ont le même cardinal.

Preuve.
On suppose $E \neq \{0\}$ sinon il n'a pas de base (et donc elles ont toutes 0 élément). Dans ce cas il en possède au moins une d'après le théorème de la base incomplète. Soient $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E de cardinal n, n'.

Comme $\mathcal{B}$ est génératrice et $\mathcal{B}'$ libre, on a $n' \leqslant n$. Comme $\mathcal{B}'$ est génératrice et $\mathcal{B}$ libre on a aussi $n \leqslant n'$. ■

III.2.4 Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. Le cardinal commun de toute ses bases est appelé dimension de E et noté $\dim_{\mathbb{K}} E$ *ou* $\dim E$.

Dans le cas $\dim E = 1$, *on dit que E est une droite vectorielle, et si* $\dim E = 2$ *on dit que E est un plan vectoriel.*

La dimension est donc le nombre de coordonnées d'un vecteur de E dans n'importe quelle base de E.

III.2.5 Exemple

1. $\dim E = 0 \iff E = \{0\}$
2. La dimension dépend du corps. Par exemple $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$ (car $(1, i)$ est une base) mais $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$
3. Plus généralement $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K} = 1$ car (1) est clairement une base.
4. $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n = n$
5. $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}_n[X] = n + 1$.

III.2.6 Corollaire

Dans un $\mathbb{K}$-ev de dimension n toute famille libre a au plus n éléments et toute famille génératrice au moins n.

III.2.7 Exemple

1. SI $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$ sont 3 vecteurs du plan alors ils sont liés, en particulier au moins l'un est cl des autres. On retrouve le fait bien connu que 3 vecteurs sont toujours coplanaires.
2. Si $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ sont deux vecteurs de l'espace alors ils n'engendrent pas $\mathbb{R}^3$: deux vecteurs engendrent au maximum un plan mais pas un espace de dimension 3, il nous faudrait au moins 3 vecteurs pour ça (à condition qu'ils forment une famille libre ie soient non coplanaires car ils sont 3)

III.2.8 Proposition
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une famille de cardinal n. Alors les assertions suivantes sont équivalentes

1. *B est une base.*
2. *B est génératrice.*
3. *B est libre.*

Autrement dit une famille libre à n éléments est génératrice et une famille génératrice à n éléments est libre.

Preuve.
Il n'y que deux implications à montrer car 1) implique trivialement 2) et 3).

— 2) $\Rightarrow$ 1). Si $\mathcal{B}$ est génératrice, on peut en extraire une base d'après le théorème de la base incomplète. Mais cette base est alors de cardinal n c'est à dire que c'est $\mathcal{B}$ en entier.

— 3) $\Rightarrow$ 1). Cette fois on complète $\mathcal{B}$ en une base qui est toujours de cardinal n et donc encore une fois $\mathcal{B}$ est une base.

III.2.9 Remarque

En pratique on prouve seulement l'un des deux quand la famille dont on dispose a le bon cardinal.

III.3 Dimensions usuelles

III.3.1 Exemple
Pour $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$,

1. $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n) = n$
2. $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^n) = 2n$
3. $\dim(\mathbb{K}_n[x]) = n + 1$ même pour $n = 0$.

III.3.2 Proposition
Soit E, F deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. Alors $E \times F$ est un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $\dim(E \times F) = \dim E + \dim F$.

Preuve.
Soient $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $(f_1, \ldots, f_p)$ une base de F. On considère la famille

$$\mathcal{B} = ((e_1, 0_F), \ldots, (e_n, 0_F), (0_E, f_1), \ldots, (0_E, f_p)))$$

. On va montrer que c'est une base de $E \times F$.

Il suffit de montrer que l'application

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{K}^{n+p} & \to & E \times F \\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \mu_1, \ldots, \mu_p) & \mapsto & \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (e_i, 0_F) + \sum_{i=1}^{p} \mu_i (0_E, f_i) \end{array} \right. \quad \blacksquare$$

est bijective. Or l'application qui à $(x, y) \in E \times F$ associe la famille des coordonnées de x (dans $(e_1, \ldots, e_n)$) suivie de la famille des coordonnées de y (dans $(f_1, \ldots, f_p)$) est clairement la réciproque de φ.

Ceci prouve que $E \times F$ est de dimension finie et $\dim(E \times F) = \dim E + \dim F$. $\blacksquare$

III.3.3 Remarque

1. On peut étendre ce théorème à plus de deux espaces : un produit cartésien de $\mathbb{K}$-ev de dimension finie est encore de dimension finie et sa dimension est la somme des dimensions des espaces.
2. C'est cohérent avec ce que l'on sait déjà : $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R} = 1$ et $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n = n$.

III.3.4 Théorème
Soient E un $\mathbb{K}$-ev et F un sev de E. Alors F et de dimension finie et $\dim F \leqslant \dim E$. *Si de plus* $\dim F = \dim E$ *alors $F = E$.*

Preuve.
On suppose que $F \neq \{0_E\}$, le résultat étant trivial dans ce cas. On remarque maintenant que toute famille libre de vecteurs de F est aussi une famille libre de vecteurs de E. Ainsi si on note L l'ensemble des cardinaux des familles libres de vecteurs de F, L est un sous ensemble de $\mathbb{N}$ non vide et majoré par $\dim E$. Posons $n = \max L$ et soit $(e_1, \ldots, e_n) \in F^n$ une famille libre. On va montrer que c'est une base de F, c'est à dire qu'elle est génératrice. S'il existe $x \in F \setminus \operatorname{Vect}(e_1, \ldots, e_n)$ alors x n'est pas combinaison linéaire des $(e_i)_i$ et donc la famille $(e_1, \ldots, e_n, x)$ est libre, ce qui contredit la maximalité de n.

Donc F est de dimension finie inférieure à celle de E. Mais si $n = \dim E$, alors $(e_1, \ldots, e_n)$ est une famille libre de E à $\dim E$ élément donc est une base de E et $F = E$. ∎

Explication C'est le pendant du théorème qui dit que toute partie d'un ensemble fini est fini.

III.3.5 Définition

1. *Un $\mathbb{K}$-ev de dimension 1 est appelé droite vectoriel.*
2. *Si E est un $\mathbb{K}$-ev de dimension n alors tout sev de dimension $n-1$ est appelé hyperplan de E.*
3. *Un $\mathbb{K}$-ev de dimension 2 est appelé plan vectoriel.*

III.3.6 Première application

On peut maintenant déterminer tous les sev de $\mathbb{R}^2$. Ils sont de dimension inférieure à 2, donc les "vrais" sev du plan sont les droites vectorielles, c'est à dire les droites qui passent par 0.

III.4 Rang d'une famille

III.4.1 Définition
Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $(e_1, \ldots, e_p)$. Le rang de la famille $(x_i)_{i \in [\![1,p]\!]}$ est la dimension de l'ev Vect$(e_1, \ldots e_p)$ (qui est bien de dimension finie). On le note $\operatorname{rg}(e_1, \ldots, e_p)$.

III.4.2 Remarque

1. La famille $(e_1, \ldots, e_p)$ est bien génératrice de $\operatorname{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$ qui est donc de dimension finie.
2. Le rang d'une famille est toujours plus petit que la dimension de l'espace en entier.
3. D'après le théorème de la base incomplète, le rang d'une famille est le nombre maximum de vecteur dans une sous-famille libre.

III.4.3 Exemple

1. $\operatorname{rg}(1, X, X^2) = 3$.
2. $\operatorname{rg}(1, X, 2X - \pi) = 2$.
3. Calculer le rang de $(1, \cos, \sin)$ dans l'espace des fonctions $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

III.4.4 Proposition
Soit E un $\mathbb{K}$ev de dimension $n > 0$.

1. *La famille $(e_1, \ldots, e_p)$ est libre ssi son rang est p.*
2. *La famille $(e_1, \ldots, e_p)$ est génératrice ssi son rang est n.*

III.5 Espaces supplémentaires

III.5.1 Définition-Proposition

Soient E un K-ev et F, G deux sev de E. Alors l'ensemble

$$F + G = \{x_F + x_G |\ x_F \in F \text{ et } x_G \in G\} = \{x \in E |\ \exists (x_F, x_G) \in F \times G\ x = x_F + x_G\}$$

est un sev de E et c'est même le plus petit sev de E contenant F et G.

Preuve.
On a évidemment $0_E \in F + G$ (c'est la somme $0_E + 0_E$ d'un élément de F et d'un élément de G).

Si maintenant $x, y \in F + G$ et $\lambda, \mu \in K$ on a par définition $x = x_F + x_G$ et $y = y_F + y_G$ avec $x_F, y_F \in F$ et $x_G, y_G \in G$. Il est alors immédiat par commutativité de + et en utilisant la distributivité de la loi externe que $\lambda x + \mu y \in F + G$.

Finalement $F + G$ est un sev de E qui contient F et G. De plus, tout sous-espace de E contenant à la fois F et G contient $F + G$ (par stabilité par addition) et la propriété de minimalité est vraie. ∎

Explication C'est l'opération qui "remplace" l'union pour les sev. En effet on a vu que la réunion de deux sev n'est pas un sev en général.

III.5.2 M-Remarque

Si on connaît une famille génératrice de F et G on peut en déduire une famille génératrice de $F + G$. Si on a $F = \text{Vect}(f_1, \dots, f_p)$ et $G = \text{Vect}(g_1, \dots, g_r)$ alors $F + G = \text{Vect}(f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_r)$.

En effet les éléments de $F+G$ sont de la forme $x = x_F+x_G$ avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$ et alors $x_F = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i$ et $x_G = \sum_{i=1}^{r} \mu_i g_i$ et x est bien une c.l. des f_i et g_i.

III.5.3 Exemple

1. On a clairement $R_3[X] = \mathbb{R}_2[X] + \mathbb{R}X^2$.
2. On se place dans $E = \mathbb{R}^3$. On pose $\mathcal{P} : x + y + z = 0$ et $\mathcal{D} : \begin{cases} 2x + z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$. Calculer une base de $\mathcal{P} + \mathcal{D}$.

   Conclusion ?
3. Dans $\mathbb{K}_2[X]$. $F = \text{Vect}(1, X + 1)$ et $G = \text{Vect}(X - 2, (X + 1)^2)$. Calculer $F + G$.

III.5.4 Définition

Soient E un K-ev et F, G deux sev de E. On dit que F et G sont supplémentaires (ou que F est UN supplémentaire de G ou que G est UN supplémentaire de F) si $\forall x \in E\ \exists!(x_F, x_G) \in (F \times G)\ x = x_F + x_G$ (tout élément de E s'écrit de manière unique comme somme d'un élément de F et d'un élément de G).

On note alors $F \oplus G = E$. On dit également que la somme $F + G$ est directe.

III.5.5 Remarque

A priori, rien ne garanti l'existence d'un supplémentaire pour un F donné.

III.5.6 Théorème

Soient E un K-ev et F, G des sev de E.

F et G sont supplémentaires ssi $E = F + G$ et $F \cap G = \{0_E\}$.

Preuve.

— $\Rightarrow$. Si F et G sont supplémentaires, alors $F + G = E$. Si maintenant $x \in F \cap G$ alors $x + O_E = 0_E + x$. En considérant d'abord x comme élément de F puis comme élément de G et par unicité de l'écriture sous forme de somme on a $x = 0_E$.

Donc $F \cap G = \{0\}$.

— $\Leftarrow$. Supposons maintenant $F + G = E$ et $F \cap G = \{0\}$. Soit $x \in E$. Si on a $x = u + v$ et $x = u' + v'$ deux décomposition de x alors $u + v = u' + v'$ donc $u - u' = v - v'$. C'est à dire que $u - u' \in G$ et donc $u - u' \in F \cap G$ donc $u = u'$ et alors $v = v'$. Donc l'écriture de x comme somme d'un élément de F et d'un élément de G est unique.

Explication Si la somme de sev est l'équivalent d'une réunion, la somme directe est l'équivalent d'une réunion disjointe.

III.5.7 Remarque

On a ici une unicité que l'on pourra utiliser pour "identifier" les coordonnées sur F et G.

III.5.8 Exemple

1. On pose $e_1 = (1,0)$ et $e_2 = (0,1)$. Alors $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}e_2$.
2. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. A quel condition a-t-on $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\vec{u} + \mathbb{R}\vec{v}$?
3. $\mathbb{R}_n[X] = \mathbb{R}_{n-1}[X] \oplus \mathbb{R}X^n$.

III.5.9 Théorème
Soit E un $\mathbb{K}$ev et F, G deux sev de E.

1. *Si on dispose de $(f_1, \ldots, f_p)$ une base de F et $(g_1, \ldots, g_r)$ une base de G, alors $E = F \oplus G$ ssi $(f_1, \ldots, f_p, g_1, \ldots, g_r)$ est une base de E.*
2. *De la même manière si on dispose de $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E alors en la "coupant" en deux on obtient des supplémentaires. Par exemple* $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_i) \oplus \mathrm{Vect}(e_{i+1}, \ldots, e_n) = E$ *pour tout* $i \in [\![1, n-1]\!]$.

Preuve.

— Supposons $E = F \oplus G$. Montrons que $(f_1, \ldots, f_p, g_1, \ldots, g_q)$ est une base de E. On sait que pour $x \in E$ on peut écrire d'une unique manière $x = x_F + x_G$. Mais $x_F \in F$ donc peut s'écrire d'une unique manière $\sum_{i=1}^{p} x_{Fi} f_i$ et $x_G \in G$ donc peut s'écrire d'une unique manière $\sum_{i=1}^{q} x_{Gi} g_i$. On a donc existence et unicité des coordonnées dans $(f_1, \ldots, f_p, g_1, \ldots, g_q)$.

— Réciproquement, supposons que $(f_1, \ldots, f_p, g_1, \ldots, g_q)$ est une base de E. Ainsi tout $x \in E$ possède des coordonnées uniques dans cette base, et il suffit de grouper les sommes comme pour le sens direct et on trouve que $x = x_F + x_G$ où x_F est la combinaison linéaire des vecteurs de base de F. Si on avait maintenant $x \in F \cap G$ alors $x \in F$ donc ses q dernières coordonnées sont nulles et $x \in G$ donc ses p premières coordonnées sont nulles. Finalement $x = 0_E$. ■

III.5.10 Exercice
On se place dans un espace E de dimension 3. A quelle condition une droite et un plan sont-ils supplémentaires ?

III.5.11 Corollaire
Soient E est un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et F, G des sous-espaces. Si on a $E = F \oplus G$ alors $\dim E = \dim F + \dim G$

III.5.12 Corollaire
Dans un espace de dimension finie E, tout sev F admet au moins un supplémentaire.
De plus tous les sev de F ont la même dimension : $\dim(E) - \dim(F)$.

Preuve.
Soit $(f_1, \ldots, f_p)$ une base de F. On peut la compléter en une base $(f_1, \ldots, f_n)$ de E. Alors $G =$Vect$(f_{p+1}, \ldots, f_n)$ est un supplémentaire de E. ■

III.5.13 Exemple
Un supplémentaire d'une droite dans le plan est une autre droite, non confondue.
Un supplémentaire d'un plan dans l'espace est une droite, non incluse dans ce plan.

III.5.14 Théorème (Formule de Grassman)
Soient E un $\mathbb{K}$-ev et F, G des sev de E.
Alors $\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$.

Preuve.
C'est vrai d'après le corollaire précédent dans le cas où $F \cap G = \{0_E\}$, c'est à dire quand els espaces sont supplémentaires.

On se place maintenant dans le cas général. On pose G' un supplémentaire de $F \cap G$ dans G (Se représenter le cas où F et G sont des plans dans l'espaces. Alors $F \cap G$ est une droite et G' est une droite non confondue avec cette intersection)

On a donc $G = G' \oplus (F \cap G)$. On va montrer que $F \oplus G' = F + G$.

On a $G' \subset G$ et $G' \cap (F \cap G) = \{0\}$ par définition de G' et donc $G' \cap F = \{0_E\}$.

Soit maintenant $x \in F + G$. on veut l'écrire sous la forme $x_F + x_{G'}$ (notations évidentes). Mais $x = x_F + x_G$ par définition. De plus $G = G' \oplus (F \cap G)$ et donc on peut écrire (de manière unique même) $x_G = x_{G'} + x_{F\cap G}$. Ainsi

$$x = \underbrace{x_F + x_{F\cap G}}_{\in F} + x_{G'}$$

En résumant on a $\dim(F+G) = \dim F + \dim G'$ et $\dim(G) = \dim(G') + \dim(F \cap G)$. Il suffit d'isoler $\dim(G')$ pour obtenir la formule voulue. ∎

III.5.15 Remarque

Cette formule sert aussi à calculer la dimension d'une intersection. C'est même la seule qu'on aura.

III.5.16 Corollaire
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et F, G deux sev. Sont équivalentes :

1. *F et G sont supplémentaires de E.*
2. *$F \cap G = \{0_E\}$ et $\dim F + \dim G = \dim E$*
3. *$F + G = E$ et $\dim F + \dim G = \dim E$*

IV Matrices

IV.1 Compléments sur le rang

IV.1.1 Transposée d'une matrice réduite

Réduire la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ puis faire des opérations sur les colonnes pour réduire complètement. Peut-on modifier le rang par opérations sur les colonnes ?

IV.1.2 Théorème
Faire des opérations élémentaires sur les colonnes ne modifie pas le rang.

Preuve.
Considérons une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et R sa matrice échelonnée réduite, associée à un système homogène d'inconnues $x_1, \dots, x_p$. On note $r = \mathrm{rg}(A)$. Il y a donc $p - r$ paramètres et r inconnues principales pour ce système.

— Echanger des colonnes de A revient à échanger le nom de deux variables. Le nombre de paramètre ne change pas.
— Effectuons l'opération $C_i \leftarrow \lambda C_i$ avec $\lambda \neq 0$ sur A. Notons $x'_i = \lambda x_i$ Après réduction on connaît les valeurs de $x_1, \dots, x'_i, \dots, x_p$ et comme $x_i = \frac{x'_i}{\lambda}$, on connaît la valeur de x_i. Ces valeurs s'expriment en fonction de $p - r$ paramètres par définition du rang. Donc le rang de A est inchangé.
— Pour l'opération $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$, le raisonnement est le même avec $x'_i = x_i + \lambda x_j$ donc $x_i = x'_i - \lambda x_j$.

IV.1.3 Corollaire
Multiplier une matrice par une matrice inversible (à gauche ou à droite) ne modifie pas son rang.

Preuve.
Il s'agit seulement de l'interprétation matricielle des opérations élémentaires sur les lignes (multiplication à gauche) et les colonnes (multiplication) à droite. ∎

IV.1.4 Corollaire
Toute matrice est équivalente par ligne puis par colonnes à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$ *avec autant de 1 sur la "diagonale" que son rang et le reste des coefficients est nul.*

Si cette matrice est de taille n, p *et de rang* r*, on la note* $J_{n,p,r}$*.*

IV.1.5 Théorème
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$*. Alors* $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}({}^tA)$

Preuve.
On réduit A par lignes puis par colonne. On obtient $A = PJ_{n,p,r}Q$ où la "diagonale" de J_r commence par r 1 et le reste de la matrice est nul.

Ainsi ${}^tA = {}^tQJ_{p,n,r}{}^tP$, c'est à dire que la matrice réduite par lignes et colonnes de ${}^tA$ est également de rang r. ■

IV.1.6 M-Remarque

Le rang d'une matrice est le nombre de lignes non nulles dans la matrice réduite. C'est donc la dimension de l'espace engendré par les lignes de cette matrice (la famille des lignes d'une matrice réduite est trivialement libre). Ainsi le rang de A est également la dimension de l'espace engendré par ses colonnes.

IV.2 Matrice d'une famille

IV.2.1 Exemple
On considère la famille de vecteurs du plan suivant $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. On peut décrire cette famille par une matrice : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

IV.2.2 Définition
Soit E *un* $\mathbb{K}$*-ev de dimension finie et* $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ *une base de* E*. Soit* $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$ *une famille de vecteurs. Pour* $i, j \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$ *on note* a_{ij} *la ième coordonnée de* x_j*.*

Alors la matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *est appelé matrice de la famille* $(x_1, \dots, x_p)$ *dans la base* $\mathcal{B}$ *et est noté* $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_p)$.

C'est la matrice des colonnes des coordonnées des x_j*.*

Explication Encore une fois, on écrit les vecteurs en colonne.

IV.2.3 Exemple
1. Soit E un $\mathbb{K}$ ev, $\mathcal{B}$ une base de E et $x \in E$. $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ est la colonne des coordonnées de x dans $\mathcal{B}$.

   Ex : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_{can}}(3X^2 + 2X + 1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.
2. On note $\mathcal{B}_{can}$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$. Alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_{can}}(X^3 + 2, 2X - 1, X^3 + X) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   Par contre $\mathrm{Mat}_{(X^3, X^2, X, 1)}(X^3 + 2, 2X - 1, X^3 + X) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
3. Reprendre l'exemple IV.2.1 : c'est la matrice dans la base canonique de la famille considérée

IV.2.4 Remarque

Comme on vient de le voir, la matrice d'une famille dépend très fortement de la base considérée.

IV.2.5 Remarque

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On note $C_1, \dots, C_p$ les colonnes de A ($\in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$) et $\mathcal{B}_{can}$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ (c'est à dire la base canonique de $\mathbb{K}^n$). Alors $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_{can}}(C_1, \dots, C_p)$.

IV.2.6 Proposition
Soit E un $\mathbb{K}$ev de dimension $n > 0$ et $\mathcal{B}$ une base de E. Soient $u, v \in E, \lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\lambda u + \mu v) = \lambda \, \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) + \mu \, \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$$

On dit que l'application $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}$ est linéaire (c'est d'ailleurs l'application réciproque de φ du théorème II.3.3)

Preuve.
On écrit les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$: $u = \sum_{i=1}^n u_i e_i$ et $v = \sum_{i=1}^n v_i e_i$.
Alors $\lambda u + \mu v = \lambda \sum_{i=1}^n u_i e_i + \mu \sum_{i=1}^n v_i e_i = \sum_{i=1}^n (\lambda u_i + \mu v_i) e_i$. CQFD. ∎

Explication Une combinaison linéaire de matrices est la matrice de la combinaison en question.

IV.2.7 Proposition
Soit E un $\mathbb{K}$ev et $(u_1, \dots, u_p) \in E$ ainsi que $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. On note $U = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_p)$
La famille $(u_1, \dots, u_p)$ est libre (resp génératrice) ssi les colonnes de A sont libres dans $\mathbb{K}^n$ (resp génératrice de $\mathbb{K}^n$)

Preuve.
Notons $C_1, \dots, C_p \in \mathbb{K}^p$ les colonnes de A. On montre d'abord le théorème pour le caractère libre.

- Supposons $u_1, \dots, u_p$ libre. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ tels que $\sum_{i=1}^p \lambda_i C_i = 0_{\mathbb{K}^n}$ alors $\mathrm{Mat}\,\mathcal{B}(\sum_{i=1}^p \lambda_i u_i) = 0_{\mathbb{K}^n}$ de donc $\sum_{i=1}^p \lambda_i u_i = 0_E$ car l'application $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}$ est bijective et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(0_E) = 0_{\mathbb{K}^n}$. Ainsi tous les λ_i sont nuls.
- Réciproquement supposons la famille $C_1, \dots, C_p$ libre. Alors les même notations si $\sum_{i=1}^p \lambda_i u_i = 0_E$ alors par application de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}$, $\sum_{i=1}^p \lambda_i C_i = 0_{\mathbb{K}^p}$ et donc tous les scalaires sont nuls.

Le passage par $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}$ et φ montre de même que tout vecteur de E est une combinaison linéaire de $(u_1, \dots, u_p)$ ssi toute colonne dans $\mathbb{K}^n$ est une combinaison de $(C_1, \dots, C_p)$ et d'ailleurs, les mêmes coefficients conviennent. ∎

IV.2.8 Exemple
Discuter les propriétés de la famille $(X^2 + X + 1, X^2 - X - 1, X^2 + 1)$ dans $\mathbb{R}_2[X]$.

IV.2.9 Proposition
Le rang d'une famille est le rang de sa matrice dans une base. En particulier, ce rang ne dépend pas de la base choisie.

Preuve.
Il suffit de combiner le résultat précédent avec le fait que le rang d'une famille est le nombre maximal de vecteur dans une sous-famille libre. ∎

IV.3 Matrices et bases

IV.3.1 Proposition

1. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A est inversible (ie est dans $GL_n(\mathbb{K})$) ssi ses colonnes forment une base de $\mathbb{K}^n$ ssi ses colonnes sont libres ssi ses colonnes sont génératrices de $\mathbb{K}^n$.*
2. *Soit E un $\mathbb{K}$ev de dimension n et $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille. Soit $\mathcal{B}$ une base de E. $(u_1, \ldots, u_n)$ est une base ssi $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, \ldots, u_n)$ est inversible.*

Preuve.
C'est une simple redite de nos conclusions du chapitre sur les matrices. ∎

IV.3.2 Remarque

Comme le rang est invariant par transposition, A est inversible ssi ses lignes forment une base.

IV.3.3 Exemple
Montrer que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

IV.3.4 Définition
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E. On appelle matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ de $\mathcal{B}'$ dans $\mathcal{B}$.

IV.3.5 Exemple
Dans $\mathbb{R}^2$, écrire la matrice de passage de $(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix})$ à $(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix})$

IV.3.6 Remarque

Une matrice de passage est inversible, et réciproquement une matrice est inversible si ses colonnes sont une base de $\mathbb{K}^n$ donc une matrice inversible peut être vu comme une matrice de passage de la base canonique à la base de ses colonnes.

IV.3.7 Colonnes des matrices de passage

On pose $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ avec $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$, $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$.

Si C_i est la ième colonne de P alors $C_i = PE_i$ où E_i est le ième vecteur de la base canonique de $\mathbb{K}^n$. De plus, par définition $C_i = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(e'_i)$.

IV.3.8 Théorème
Soit E un $\mathbb{K} - ev$ de dimension n et $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E. Soit également $x \in E$.

On pose $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$, $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ et $X' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(x)$. Alors

$$X = PX'$$

Preuve.
Avec les mêmes notations, on a effet $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i = \sum_{i=1}^n x'_i e'_i$.

Alors $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$. On passe aux matrices dans $\mathcal{B}$:

$$X = \sum_{i=1}^n x'_i \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(e'_i) = \sum_{i=1}^n x'_i C_i = PX'$$

IV.3.9 Exemple
Trouver les coordonnées du vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ dans la base (u_1, u_2) avec $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

IV.3.10 Corollaire
Si P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ alors P^{-1} est la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.

Preuve.
On a en effet $X = PX' \iff X' = P^{-1}X$, ceci étant valable pour tout X, X'. ■

IV.3.11 Exemple
Trouver les matrices de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ à la base (u_θ, v_θ) pour $\theta \in \mathbb{R}$. En déduire les formules de changement de coordonnées par rotation dans le plan.