I Espaces vectoriels

I.1 K-espace vectoriel

Définition 1
Soit E un ensemble munit d'une opération notée $+$ $\left\{\begin{array}{ccc} E\times E & \to & E \\ (x,y) & \mapsto & x+y\end{array}\right.$ et d'une loi "externe" définie par $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{K}\times E & \to & E \\ (\lambda,x) & \mapsto & \lambda.x\end{array}\right.$.

On dit que E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ssi

1. *$+$ est associative ie $\forall x,y,z\in E$ $(x+y)+z=x+(y+z)$.*
2. *$+$ possède un neutre noté 0_E tel que $\forall x\in E$ $0_E+x=x+0_E$*
3. *$+$ est commutative ie $\forall x,y\in E$ $x+y=y+x$*
4. *Tout $x\in E$ possède un opposé noté $-x$ tel que $x+(-x)=(-x)+x=0_E$.*
5. *$\forall x,y\in E\forall\lambda\in\mathbb{K}$ $\lambda.(x+y)=\lambda.x+\lambda.y$*
6. *$\forall x\in E\forall\lambda,\mu\in\mathbb{K}$ $(\lambda+\mu).x=\lambda.x+\mu.x$*
7. *$\forall x\in E\forall\lambda,\mu\in\mathbb{K}$ $(\lambda\mu).x=\lambda.(\mu.x)$*
8. *$\forall x\in E$ $1_{\mathbb{K}}.x=x$.*

Les éléments de E sont alors appelés vecteurs (et 0_E est le vecteur nul) et ceux de $\mathbb{K}$ scalaires. La loi $+$ est l'addition de l'espace vectoriel et la loi . est la multiplication par un scalaire.

Définition 2
*Soit E un espace vectoriel et $e_1,\dots,e_n\in E^n$. Une combinaison linéaire de $x_1,\dots,x_n$ est un **vecteur** de la forme $\sum_{i=1}^{n}\lambda_ie_i$ où $\lambda_i\in\mathbb{K}$.*

I.2 Exemples

I.3 Sous-espaces vectoriels

Définition 3
Soit E un $\mathbb{K}$-ev et F une partie non vide de E. On dit que F est un sous-$\mathbb{K}$-espace vectoriel de E (abrégé sous-ev ou sev) si F est un $\mathbb{K}$-ev pour les lois de E restreinte à F (en particulier il est stable par ces lois).

I.4 Résumé des exemples

II Bases

II.1 Sev engendrés

Définition-Proposition 1
Soit E un $\mathbb{K}$-espace-vectoriel et $e_1,\dots,e_n\in E$. L'espace vectoriel engendré par $e_1,\dots,e_n$ est $F=\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_n)=\{\lambda_1e_1+\dots+\lambda_ne_n|\lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{K}\}$.

C'est un sous-espace de E et tout espace G qui contient $e_1,\dots,e_n$ vérifie $F\subset G$. (on dit que l'espace engendré est le plus petit espace au sens de l'inclusion qui contienne les vecteurs $e_1,\dots,e_n$).

Définition 4
Soit E un $\mathbb{K}$-ev. On dit que $(e_1,\dots,e_n)$ est une famille génératrice de E (ou engendre E) ssi $E=\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_n)$, c'est à dire si tous les éléments de E peuvent s'écrire comme combinaison linéaire des e_i, ou encore $\forall u\in E$ $\exists(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n$ $u=\sum_{i=1}^{n}\lambda_ie_i$

II.2 Familles libres

Définition 5
Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $(e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une famille de vecteurs de E.

1. *On dit que $(e_i)_i$ est liée s'il existe $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ une famille de scalaire **non tous nul**s tels que $\sum_{i=1}^{n}\lambda_ie_i=0$ C'est à dire qu'il existe une combinaison linéaire des e_i qui soit nulle sans que tous les coefficients le soit. On dit aussi que les e_i sont linéairement dépendant.*
2. *Si $(e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ n'est pas liée, elle est dite libre (ou linéairement indépendante). C'est à dire que pour toute famille $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n$ $\sum_{i=0}^{n}\lambda_ie_i=0\Rightarrow\forall i\in[\![1,n]\!]\lambda_i=0$*

   En particulier une famille libre ne contient jamais le vecteur nul.

Définition 6
Dans E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1. *Deux vecteurs liés sont dits colinéaires.*
2. *Quand trois vecteurs forment une famille liée, ils sont dits coplanaires*

II.3 Bases

Définition 7

Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $(e_1,\dots,e_n)\in E^n$. On dit que E est une base ssi

$$\forall u\in E\ \exists!(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{K}^n\ u=x_1e_1+\cdots+x_ne_n=\sum_{i=1}^n x_ie_i$$

.

Définition 8

Soit E un $\mathbb{K}$-ev possédant une base $(e_1,\dots,e_n)$. Soit également $u\in E$. On appelle coordonnées de u dans la base $(e_1,\dots,e_n)$ l'unique famille $\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\in\mathbb{K}^n$ telle que $\sum_{i=1}^n x_ie_i=u$.

Pour $k\in[\![1,n]\!]$, le scalaire x_k est la kème coordonnée de u dans $(e_1,\dots,e_n)$.

III Espaces de dimension finie

III.1 Bases incomplète

Définition 9

Soit E un $\mathbb{K}$-ev. On dit que E est de dimension finie si E possède une famille génératrice finie.

III.2 Dimension

Définition 10

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. Le cardinal commun de toute ses bases est appelé dimension de E et noté $\dim_{\mathbb{K}} E$ ou $\dim E$.

Dans le cas $\dim E=1$, on dit que E est une droite vectorielle, et si $\dim E=2$ on dit que E est un plan vectoriel.

La dimension est donc le nombre de coordonnées d'un vecteur de E dans n'importe quelle base de E.

III.3 Dimensions usuelles

Définition 11

1. *Un $\mathbb{K}$-ev de dimension 1 est appelé droite vectoriel.*
2. *Si E est un $\mathbb{K}$-ev de dimension n alors tout sev de dimension $n-1$ est appelé hyperplan de E.*
3. *Un $\mathbb{K}$-ev de dimension 2 est appelé plan vectoriel.*

III.4 Rang d'une famille

Définition 12

Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $(e_1,\dots,e_p)$. Le rang de la famille $(x_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ est la dimension de l'ev Vect$(e_1,\dots e_p)$ (qui est bien de dimension finie). On le note $\mathrm{rg}(e_1,\dots,e_p)$.

III.5 Espaces supplémentaires

Définition-Proposition 2

Soient E un K-ev et F,G deux sev de E. Alors l'ensemble

$$F+G=\{x_F+x_G|\ x_F\in F \text{ et } x_G\in G\}=\{x\in E|\ \exists(x_F,x_G)\in F\times G\ x=x_F+x_G\}$$

est un sev de E et c'est même le plus petit sev de E contenant F et G.

Définition 13

Soient E un K-ev et F,G deux sev de E. On dit que F et G sont supplémentaires (ou que F est UN supplémentaire de G ou que G est UN supplémentaire de F) si $\forall x\in E\ \exists!(x_F,x_G)\in(F\times G)\ x=x_F+x_G$ (tout élément de E s'écrit de manière unique comme somme d'un élément de F et d'un élément de G).

On note alors $F\oplus G=E$. On dit également que la somme $F+G$ est directe.

IV Matrices

IV.1 Compléments sur le rang

IV.2 Matrice d'une famille

Définition 14

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ une base de E. Soit $(x_1,\dots,x_p)\in E^p$ une famille de vecteurs. Pour $i,j\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]$ on note a_{ij} la ième coordonnée de x_j.

Alors la matrice $A=(a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est appelé matrice de la famille $(x_1,\dots,x_p)$ dans la base $\mathcal{B}$ et est noté $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1,\dots,x_p)$.

C'est la matrice des colonnes des coordonnées des x_j.

IV.3 Matrices et bases

Définition 15

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $\mathcal{B},\mathcal{B}'$ deux bases de E. On appelle matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ de $\mathcal{B}'$ dans $\mathcal{B}$.