Devoir en temps libre n°9

A rendre le 30/03/2017 au plus tard. Les résultats seront soulignés ou $\boxed{\text{encadrés}}$. Vous pouvez rédiger de devoir à 2 à condition que chacun rédige au moins et une partie que tous cherchent le devoir en entier.

Exercice 1 (Des récurrences)
On définit une suite de polynômes à coefficients réels $(T_n)_n$ par : $T_0 = 1, T_1 = X$ et $\forall n \in \mathbb{N}\ T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$.

1. Expliciter les polynômes T_2, T_3 et T_4.
2. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, exprimer $\cos(2\theta)$ puis $\cos(3\theta)$ en fonction de puissances de $\cos(\theta)$.
3. Constater qu'on a bien $\forall \theta \in \mathbb{R} \forall k \in [\![0, 3]\!] T_k(\cos(\theta)) = \cos(k\theta)$
4. (a) Déterminer le degré de T_n et montrer que son coefficient dominant est 2^{n-1} pour tout $n \geqslant 1$.
   (b) Préciser la valeur de $T_n(0)$ en fonction de n.
5. (a) Rappeler la formule de linéarisation d'un produit de cosinus ($\cos a \cos b = \cdots + \dots$ où il n'y a pas de produit de quantités trigonométriques dans le membre de droite).
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a
   $$\forall \theta \in \mathbb{R}\ T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta) \qquad (*)$$
   (c) Déduire de * les valeurs de $T_n(0)$ et $T_n(1)$ en fonction de n. (On demande donc de **retrouver** la valeur de $T_n(0)$)
6. Montrer que
   $$\forall n \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{R}\ T_n(-x) = (-1)^n T_n(x).$$
   En déduire la parité de T_n (que l'on considère ici comme fonction polynomiale).
   Qu'en déduire pour les coefficients de T_n ?
7. Dans cette question on fixe $n \geqslant 1$.
   (a) Pour tout $k \in \mathbb{Z}$ on pose $x_k = \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)$. Calculer $T_n(x_k)$.
   (b) Montrer proprement que les nombres $(x_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ sont distincts.
   (c) En déduire que le polynôme T_n est scindé sur $\mathbb{R}$ et que toutes ses racines sont dans $[-1, 1]$.
   (d) Ecrire la factorisation en irréductibles de T_n dans $\mathbb{R}[X]$.
   (e) Calculer $\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)$.
   (f) Si on écrit $T_n = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, donner la valeur de $\sum_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)$ en fonction des a_k puis calculer cette valeur.
8. Soit $n \in \mathbb{N}$. On se propose ici de trouver tous les coefficients de T_n par un calcul direct.
   (a) Développer l'expression $(\cos\theta + i\sin\theta)^n$ pour un $\theta \in \mathbb{R}$.
   (b) Donner un lien entre $T_n(\cos\theta)$ et $(\cos\theta + i\sin\theta)^n$ (pour le même θ).
   (c) Exprimer $T_n(\cos\theta)$ en fonction de puissances de $\cos(\theta)$ uniquement (on ne veut plus de sin).
   Indications : à quel condition sur l'entier k a-t-on $i^k \in \mathbb{R}$? Poser aussi $p = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, le plus grand entier tel que $2p \leqslant n$.
   (d) En déduire les coefficients de T_n.
   Indication : avant d'échanger les deux symboles $\sum$, on effectuera le changement d'indice $j = k - i$ si l'indice de la première somme est k et l'indice de la somme "intérieure" est i, en prouvant au passage que $(-1)^{k-i} = (-1)^{k+i}$ pour tout entiers k, i.