Devoir surveillé n°3

Durée : 4H. Calculatrices interdites. **Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction et la propreté : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.**

Lisez l'énoncé attentivement et en entier **AVANT** de commencer chaque exercice.

Exercice 1 (Questions de cours)

1. (a) Donner le développement en série entière de $f : x \mapsto \frac{1}{1-x}$ et préciser le domaine de convergence.

   (b) En déduire que
   $$\forall x \in]-1,1[\ \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} \text{ et } \frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n!}{(n-2)!} x^{n-2}$$

   (c) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$ on a
   $$\forall x \in]-1,1[\ \frac{p!}{(1-x)^{p+1}} = \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{n!}{(n-p)!} x^{n-p}$$
   et en déduire le développement en série entière de $x \mapsto \frac{1}{(1-x)^{p+1}}$ (la puissance de x doit être égale à l'indice dans votre réponse).

2. Donner le développement en série entière de $x \mapsto (1+x)^{\alpha}$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et donner une autre forme du développement de $x \mapsto \frac{1}{(1-x)^{p+1}}$ où $p \in \mathbb{N}$.

3. Rappeler les développements en séries entières de $\exp, \cos, \sin$ puis prouver que
   $$\forall t \in \mathbb{R} \ e^{it} = \cos(t) + i\sin(t) \text{ et } \cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$$

4. On considère la matrice $A \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Montrer que A est diagonalisable.

5. Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

   (a) Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On suppose que $f \circ g = g \circ f$.
   Montrer que $\ker(f - \lambda Id_E)$ est stable par g.

   (b) Soit $u \in E$ un vecteur non nul et $D = \mathrm{Vect}(u)$ une droite de E. On suppose que D est stable par g. Montrer que u est un vecteur propre de g.

   (c) On suppose que χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$ et à racines simples, et que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que f et g sont diagonalisables dans une même base.

Exercice 2

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\mathrm{d}t$ et pour $x \in [0,1[$, $W_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t$

1. Calculer I_0, I_1 et $W_0(x)$.
2. Calculer $W_1(x)$. On pourra penser à noter une puissance à la place de la racine.
3. En effectuant le changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - t$, montrer que $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\mathrm{d}t$ et en déduire la valeur de I_2.
4. En effectuant le changement de variable $t = \sin(u)$ dans $W_n(x)$ montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t$ est une intégrale convergente et qu'elle vaut I_n.
5. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$.
6. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n = (n+1)I_n I_{n+1}$ est constante et préciser la valeur de cette constante.
7. Montrer que la suite (I_n) est décroissante et en déduire que $I_n \underset{+\infty}{\sim} I_{n+1}$.
8. Déduire des questions précédentes un équivalent de I_n en $+\infty$.
9. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}\ I_{2n} = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}\frac{\pi}{2}$.
10. Montrer que $\binom{2n}{n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$.

Exercice 3 (Problème d'algèbre linéaire)

Partie I

On considère les matrices carrées

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que la matrice A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.
2. La matrice B est-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$?
3. Calculer A^2.
4. Déterminer une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$.
5. Retrouver sans calcul que B est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

Partie II

On considère maintenant un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ de dimension finie. Pour un endomorphisme f de E, f^2 désigne $f \circ f$. La notation Id_E désigne l'endomorphisme identité de E.

1. Soit f, g deux endomorphismes de E tels que $f \circ g = 0$. Montrer que $\mathrm{Im}(g) \subset \ker(f)$.
2. On suppose dans cette question que f est un endomorphisme **diagonalisable** de E. On désigne par $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, avec $p \in \mathbb{N}^*$, ses valeurs propres.
   (a) Montrer que, pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,
   $$(f - \alpha Id_E) \circ (f - \beta Id_E) = (f - \beta Id_E) \circ (f - \alpha Id_E)$$
   (b) Montrer que, pour tout vecteur propre v de f, on a
   $$(f - \lambda_1 Id_E) \circ \cdots \circ (f - \lambda_p Id_E)(v) = 0$$
   (c) Soit $x \in E$ un vecteur quelconque. en décomposant x dans une base bien choisie, montrer que
   $$(f - \lambda_1 Id_E) \circ \cdots \circ (f - \lambda_p Id_E)(x) = 0$$
3. On suppose dans cette question que f est un endomorphisme de E tel que
   $$(f - \alpha Id_E) \circ (f - \beta Id_E) = 0 \qquad (\star)$$
   pour des réels α et β distincts.
   (a) Déterminer deux réels a et b tels que $a(f - \alpha Id_E) + b(f - \beta Id_E) = Id_E$.
   (b) En déduire que $E = \mathrm{Im}(f - \alpha Id_E) + \mathrm{Im}(f - \beta Id_E)$.
   (c) Déduire de $(\star)$ que $\mathrm{Im}(f - \beta Id_E) \subset \ker(f - \alpha Id_E)$
   et que $\mathrm{Im}(f - \alpha Id_E) \subset \ker(f - \beta Id_E)$
   (d) Montrer que $E = \ker(f - \alpha Id_E) + \ker(f - \beta Id_E)$.
   (e) Montrer que $E = \ker(f - \alpha Id_E) \oplus \ker(f - \beta Id_E)$.
   (f) En déduire que f est diagonalisable.
4. On suppose dans cette question que f est un endomorphisme de E tel que f^2 est diagonalisable et a toutes ses valeurs propres strictement positives. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ ces valeurs propres.
   (a) Pour $1 \leqslant k \leqslant p$, on note F_k le sous-espace propre de f^2 associé à la valeur propre λ_k. Montrer que, pour tout $k \in \{1, \dots, p\}$, F_k est stable par f.
   (b) Pour $1 \leqslant k \leqslant p$, on note f_k la restriction de f à F_k et on pose $\mu_k = \sqrt{\lambda_k}$.
   Montrer que $(f_k + \mu_k Id_{F_k}) \circ (f_k - \mu_k Id_{F_k}) = 0$.
   (c) En déduire que f_k est diagonalisable.
   (d) Pour $1 \leqslant k \leqslant p$, on note $F_k^+ = \ker(f_k + \mu_k Id_{F_k})$ et $F_k^- = \ker(f_k - \mu_k Id_{F_k})$. Montrer que
   $$E = F_1^+ \oplus F_1^- \oplus \cdots \oplus F_p^+ \oplus F_p^-.$$
   En déduire que f est diagonalisable.

Exercice 4

On considère les fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}$:

$$g : x \mapsto e^{x^2},\ G : x \mapsto \int_0^x e^{t^2} \mathrm{d}t,\ h : x \mapsto e^{-x^2}$$

et enfin

$$F : x \mapsto e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} \mathrm{d}t$$

1. Montrer rapidement que G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée est g.
2. Montrer que la fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que g, h sont développables en séries entières sur $\mathbb{R}$ et donner leurs développements.
4. En appliquant des théorèmes de cours uniquement, et en évitant des calculs trop compliqués, montrer que la fonction F est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ (on ne demande pas ici de donner le développement de F).
5. Montrer que la fonction F est solution, sur $\mathbb{R}$, de l'équation différentielle :

$$y'(x) = -2xy(x) + 1$$

6. En recherchant le développement en série entière de F sous la forme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ où les coefficients a_n sont à trouver, montrer que $a_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\} a_{n+1} = \frac{-2}{n+1} a_{n-1}$.
7. Que vaut a_0 ?
8. Montrer que pour tout entier naturel p, $a_{2p+1} = \frac{(-1)^p 2^{2p} p!}{(2p+1)!}$.
9. Que vaut a_{2p}, pour $p \in \mathbb{N}$? Justifier rapidement.
10. En déduire le développement en série entière de F.
11. Étudier la convergence de la série de terme général

$$\frac{(-1)^n 4^n n!}{(2n+1)!}$$

12. Donner le développement en série entière de la fonction qui, à tout réel x, associe

$$\int_0^x e^{t^2} \mathrm{d}t$$

puis déduire de ce qui précède que, pour tout entier naturel n :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{n}{k} = \frac{4^n}{(2n+1)\binom{2n}{2}}$$