Table des matières

On fixe deux entiers naturels $p, n \geqslant 1$ qui valent $1, 2$ ou 3 en pratique.
Le cadre général est ici de considérer des fonctions $f : A \to \mathbb{R}^n$ où $A \subset \mathbb{R}^p$.
Dans le cas $p = 2$, on considère par exemple des fonctions de la forme

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} A & \to & \mathbb{R}^n \\ (x,y) & \mapsto & f(x,y) \end{array} \right.$$

où $f(x,y)$ est une colonne de $\mathbb{R}^n$.

I Continuité

I.1 Domaines de définition

I.1.1 Définition

Soit $r \in [0, +\infty[$ et $X_0 \in \mathbb{R}^p$

1. La boule ouverte de rayon r et de centre X_0 est $B(X_0, r) = \{X \in \mathbb{R}^p | \ \|X_0 - X\| < r\}$.
2. La boule fermée de rayon r et de centre X_0 est $\overline{B}(X_0, r) = \{X \in \mathbb{R}^p | \ \|X_0 - X\| \leqslant r\}$.

I.1.2 Illustration

Lien avec la forme du domaine de convergence d'une série entière. On illustre ces définitions dans le cas $p = 2$. Pour $p = 3$, il faut considérer des sphères plutôt que des cercles.

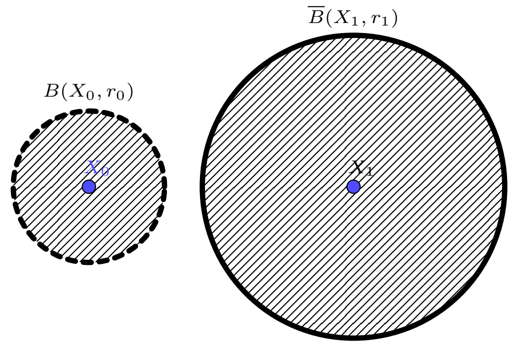

FIGURE 1 – Boule ouverte, boule fermée

I.1.3 Définition-Proposition

Soit A une partie de $\mathbb{R}^p$. Les propositions suivantes sont équivalentes.

1. il existe $X_0 \in \mathbb{R}^p$ et $r > 0$ tels que $A \subset \overline{B}(X_0, r)$.
2. pour tout $X_0 \in \mathbb{R}^p$ il existe $r > 0$ tel que $A \subset \overline{B}(X_0, r)$.
3. il existe $M \in R^+$ tel que $\forall X \in A \ \|X\| \leqslant M$.

Dans ce cas, on dit que A est une partie **bornée** de $\mathbb{R}^p$.

Preuve.

— $1 \Rightarrow 2$. On note X_0 et r_0 les objets dont l'existence est assurée par 1.
Soit $X_1 \in \mathbb{R}^p$. On doit trouver $r_1 > 0$ tel que $A \subset \overline{B}(X_1 r_1)$. Or, pour $X \in A$ on a déjà $\|X_0 - X\| \leqslant r_0$.
Alors $\|X_1 - X\| = \|X_1 - X_0 + (X_0 - X)\| \leqslant \|X_1 - X_0\| + \|X_0 - X\| = \|X_1 - X_0\| + r_0$. Comme $\|X_1 - X_0\|$ ne dépend pas de X, on peut poser la constante $r_1 = \|X_1 - X_0\| + r_0$ qui convient.

— $2 \Rightarrow 3$. Il suffit d'appliquer 2 à $X_0 = 0_{\mathbb{R}^p}$ et alors $M = r$ convient.

— $3 \Rightarrow 1$. De même, $X_0 = 0$ et $r = M$ conviennent. ∎

I.1.4 Exemple

Toute boule ouverte ou fermée est bornée.

$A = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 | \ 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4\}$ est bornée, $B = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 | \ |x| \leqslant 1\}$ n'est pas bornée.

I.1.5 Définition

Soit A une partie de $\mathbb{R}^p$.

1. On dit que A est une partie **ouverte** de $\mathbb{R}^p$ (on dit aussi que A est un ouvert) ssi

$$\forall X_0 \in A \exists r > 0 \ B(X_0, r) \subset A$$

2. On dit que A est une partie **fermée** de $\mathbb{R}^p$ ssi $\overline{A}$ (son complémentaire) est une partie ouverte.

I.1.6 Exemple

— Toute boule ouverte est un ouvert.
— Toute boule fermée est un fermé.
— Une couronne ouverte, $\mathbb{R}^p$ sont des ouverts.
— $\mathbb{R}^p$ est fermé.
— Le demi-plan $y > 0$ est un ouvert.
— Les deux parties de l'exemple I.1.4

I.1.7 Interprétation intuitive

Dans un ouvert A, on peut toujours se placer “suffisamment proche” d'un point et rester dans A.

Une première approche est de voir que pour un ouvert la “frontière” est exclue alors qu'elle est incluse dans un fermé.

I.1.8 Définition

Soit A une partie de $\mathbb{R}^p$ et $X_0 \in \mathbb{R}^p$.

1. On dit que X_0 est un point intérieur à A ssi $\exists r > 0 \ B(X_0, r) \subset A$. En particulier $X_0 \in A$.
2. On dit que X_0 est un point extérieur à A ssi $\exists r > 0 \ B(X_0, r) \subset \mathbb{R}^p \backslash A$. En particulier $X_0 \notin A$ et X_0 est intérieur au complémentaire de A.
3. On dit que X_0 est un point adhérent à A ssi $\forall r > 0 \ B(X_0, r) \cap A \neq \emptyset$. Cette fois on n'a pas forcément $X_0 \in A$. Par contre, X_0 n'est pas extérieur à A.
4. On dit que X_0 est un point frontière de A ssi X_0 est à la fois adhérent et pas intérieur à A.

   De manière équivalente, pour tout $r > 0$, la boule ouverte $B(X_0, r)$ a une intersection non vide avec A et son complémentaire.

I.1.9 Illustration graphique

Tracer les différents ensembles pour A la boule unité qui ne contient qu'une demi frontière : $A = B(0,1) \cup \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 | \ y \geqslant 0 \text{ et } x^2 + y^2 = 1\}$.

I.1.10 Proposition

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}^p$. On note $B = \mathbb{R}^p \backslash A$ le complémentaire de A. Soit $X_0 \in \mathbb{R}^p$

1. X_0 est intérieur à A ssi X_0 n'est pas adhérent à B.
2. X_0 est adhérent à A ssi X_0 n'est pas intérieur à B.
3. A est ouvert ssi tout point de A est intérieur à A.
4. A est fermé ssi tout point adhérent à A est un point de A.
5. Tout point de A est adhérent à A.
6. Tout point intérieur à A est un point de A.

Preuve.

Simple jeu avec les définitions. Bon exercice théorique pour vérifier la connaissance de celles-ci. ■

I.2 Fonctions continues

I.2.1 Représentation graphique

On considère une fonction $f : A \to \mathbb{R}$ où $A \subset \mathbb{R}^2$. Alors on peut considérer l'ensemble des points de l'espace vérifiant l'équation $z = f(x, y)$. Il s'agit de la surface représentative de f.

I.2.2 Définition

Soit A une partie de $\mathbb{R}^p$ et $f : A \to \mathbb{R}^n$. Soit $\ell \in \mathbb{R}^n$.

1. Soit a un point adhérent à A. On dit que f admet ℓ comme limite en a ssi

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \alpha > 0 \forall x \in A \ \|x - a\| \leqslant \alpha \Rightarrow \|f(x) - \ell\| \leqslant \varepsilon$$

   Il faut comprendre $\|x - a\|$ comme la norme dans $\mathbb{R}^p$ et $\|f(x) - \ell\|$ comme la norme dans $\mathbb{R}^n$.

2. Soit $a \in A$. On dit que f est continue en a ssi

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \alpha > 0 \forall x \in A \ \|x - a\| \leqslant \alpha \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| \leqslant \varepsilon$$

   f est **continue** sur A ssi f est continue en tout point de A.

I.2.3 Proposition
Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction continue où A est une partie de $\mathbb{R}^p$.

1. L'ensemble $\{X \in A;\ f(X) > 0\}$ est un ouvert.
2. Les ensembles $\{X \in A;\ f(X) = 0\}$ et $\{X \in A;\ f(X) \geqslant 0\}$ sont des fermés.

Preuve.

1. Soit $X_0 \in A$ tel que $f(X_0) > 0$. On veut trouver une boule ouverte centrée en X_0 telle que tous ses éléments aient une image strictement positive par f.
   Notons $\varepsilon = \frac{f(X_0)}{2} > 0$. Alors, par définition de la continuité, on peut poser $\alpha > 0$ tel que si $X \in A \cap \overline{B}(X_0, \alpha)$ alors $|f(X) - f(X_0)| \leqslant \varepsilon$. Mais alors $f(X) > 0$ par inégalité triangulaire.
   Il reste à remarquer que $B(X_0, \alpha) \subset \overline{B}(X_0, \alpha)$.
2. $\{X \in A;\ f(X) < 0\}$ est ouvert, car $-f$ est clairement continue.
   Ainsi $\{X \in A;\ f(X) \geqslant 0\}$ est fermé tout comme $\{X \in A;\ f(X) \leqslant 0\}$. De plus, l'intersection de deux fermés est fermé (car la réunion de deux ouverts est clairement ouverte). ∎

I.2.4 Théorème
Soit $f : A \to \mathbb{R}^n$ où $A \subset \mathbb{R}^p$.

1. On note $f = (f_1, \dots, f_n)$ les fonctions coordonnées de f. f est continue (en un point ou sur A) si et seulement si toutes les f_i sont continues.
2. Une somme de fonctions continues est continue, le produit d'une fonction continue par un réel est continue ($\mathcal{C}(A, \mathbb{R}^n)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel)
3. Si $n = 1$ (fonctions à valeurs réelles), le produit de deux fonctions continues est encore continue. L'inverse d'une fonction continue qui ne s'annule pas est continue.
4. Soit $g : U \to \mathbb{R}^m$ telle que $f(A) \subset U$. Si f et g sont continues alors $g \circ f : A \to \mathbb{R}^m$ est continue sur A.

Preuve.
Reprendre les preuves de 1ère année en adaptant les notations. ∎

I.2.5 Exemple
On considère des fonctions de deux variables.

1. $(x, y) \mapsto x$ est continue sur $\mathbb{R}^2$. Revenir à la définition
2. $(x, y) \mapsto y$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.
3. $(x, y) \mapsto x^2 + xy + 3xy^4$ est continue (par produits et sommes). Plus généralement, toute fonction polynomiale en x, y est continue.
4. $(x, y) \mapsto \sin(xy)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ par composition.

I.2.6 Applications partielles

Soit $A \subset \mathbb{R}^p$, $a = (a_1, \dots, a_p) \in A$.

Les applications partielles de f en a sont les fonctions $f_{a,i} : t \mapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_p)$ (on fixe toutes les variables sauf la $i$ème) définies partout où c'est possible.

Si f est continue en a alors toutes les f_i sont continues en a_i. La réciproque est fausse, on peut montrer que $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array} \right.$ n'est pas continue en $(0, 0)$ pourtant les deux applications partielles sont nulles donc continue sur $\mathbb{R}$.

Indication : On se place sur l'arc paramétré $x(t) = t, y(t) = t^2$ et on fait tendre t vers 0 : on se place arbitrairement près de $(0, 0)$ mais f prend des valeurs arbitrairement grande.

I.2.7 Théorème (Image d'un fermé borné)
Soit $A \subset \mathbb{R}^p$ **fermée et bornée** et $f : A \to \mathbb{R}^n$

1. Si f est continue sur A, alors $f(A)$ est une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^n$.
2. Si $n = 1$ et que $f : A \to \mathbb{R}$ est continue, alors f est bornée et atteint ses bornes : $\inf\limits_{x \in A}(f(x)) = \min\limits_{x \in A}(f(x))$ et $\sup\limits_{x \in A}(f(x)) = \max\limits_{x \in A}(f(x))$.

Preuve.
Totalement hors programme.

Posons $B = f(A)$. On veut montrer que B est bornée. Par l'absurde, supposons que B n'est pas bornée

— $\forall n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}\ \exists y_n \in B\ \|y_n\| \geqslant n$.
On peut ainsi créer une suite $(y_n) \in B$ telle que $\|y_n\| \underset{n \to +\infty}{\to} +\infty$. Or, par définition, chaque y_n possède au moins un antécédent dans A. On en choisit un

que l'on note x_n. Alors (x_n) est une suite d'éléments de A qui est borné et on peut alors (théorème de Bolzano-Weierstrass, appliqué p fois successivement), extraire une suite $(x_{\varphi(n)})$ qui converge vers $x \in \mathbb{R}^p$.

— Montrons que le fait que A est fermé implique que $x \in A$. Déjà, x n'est pas extérieur à A, car si on avait $r > 0$ tel que $B(x,r) \cap A = \emptyset$ alors $\|x_n - x\| > r$ pour tout n ce qui contredit $x_n \to x$.

Ainsi x est adhérent à A d'après I.1.10. D'après cette même proposition et comme A est fermé, $x \in A$.

— Maintenant on a $(x_{\varphi(n)}) \in A^{\mathbb{N}}$ qui converge vers $x \in A$ et comme f est continue, $f(x_{\varphi(n)}) \underset{+\infty}{\to} f(x) \in B$. En posant $y = f(x)$ on a deux choses : $\|y_n\| \underset{+\infty}{\to} +\infty$ par construction et $\|y_{\varphi(n)}\| \underset{+\infty}{\to} \|y\|$ par continuité de la norme (cette continuité est vraie par produits, sommes, puis composition par $\sqrt{\cdot}$).

— Contradiction

Ainsi B est borné. Montrons maintenant que B est fermé, c'est-à-dire que tout point adhérent de B est un point de B.

Soit b adhérent à B. Pour $n \in \mathbb{N}$ on a donc (avec $r = \frac{1}{n+1}$ dans la définition) $B(b, \frac{1}{n+1}) \cap B \neq \emptyset$. Notons b_n un élément de cette intersection. On a construit une suite (b_n) d'éléments de B telle que $\forall n \in \mathbb{N}\ \|b_n - b\| \leqslant \frac{1}{n+1}$ et donc $b_n \underset{+\infty}{\to} b$. Comme précédemment, on construit une suite (a_n) telle que $f(a_n) = b_n$ pour tout n et on en extrait une suite qui converge vers $a \in A$. Alors par unicité de la limite, $b = f(a)$ et donc $b \in B$.

Finalement, B est bien fermé en plus d'être borné. ■

I.2.8 Remarque

Il s'agit de la version plusieurs variables du théorème important : l'image d'un segment par une application continue est un segment.

I.2.9 Exemple

Voici des exemples de parties fermées et bornées : $\overline{B}(a,r)$, $[a,b] \times [c,d]$.

II Dérivées partielles

Ici, pour simplifier la rédaction, on fixe $p = 3$, il suffit d'enlever une variable pour retrouver le cas d'une fonction de deux variables.

II.1 Dérivabilité

II.1.1 Définition

Soit $f : \left\{ \begin{array}{rcl} U & \to & \mathbb{R}^n \\ (x,y,z) & \mapsto & f(x,y,z) \end{array} \right.$ où $U \subset \mathbb{R}^p$. Soit $a = (x_0, y_0, z_0)$ un point **intérieur** à U.

On dit que f possède une dérivée partielle par rapport à x en $a = (x_0, y_0, z_0)$ ssi l'application partielle $x \mapsto f(x, y_0, z_0)$ (qui est définie sur un intervalle centré en x_0, car a est intérieur) est dérivable en x_0. Ce nombre dérivé est alors noté $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)$ ou $\partial_1 f(x_0, y_0, z_0)$.

On définit de même $\frac{\partial f}{\partial y}$ et $\frac{\partial f}{\partial z}$.

II.1.2 Remarque

1. Il s'agit toujours de se ramener à une fonction d'une variable, en fixant les autres au point qui nous intéresse.
2. $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{h}$

II.1.3 Attention

Même si f est définie sur une partie fermée, on ne parle de la dérivabilité qu'à l'intérieur de A. On pourra rencontrer des fonctions continues sur $\overline{B}(0,1)$ et dérivable seulement sur $B(0,1)$.

II.1.4 Exemple

Calculer les dérivées partielles, si possible, pour :

1. $f : (x,y,z) \mapsto \sin(2xy - yz)$.
2. $f : (x,y,z) \mapsto (x^2y + z, x^2 - y^2 + xz)$

II.1.5 Définition

Soit U un **ouvert** de $\mathbb{R}^p$ et $f : U \to \mathbb{R}^n$. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U ssi f possède p dérivées partielles sur U et que ces fonctions de p variables sont continues sur U.

II.1.6 Exemple

Les fonctions précédentes sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$

II.1.7 Définition

Soit $U \subset \mathbb{R}^p$ un ouvert et $f : U \to \mathbb{R}$ (remarquez le cas $n = 1$). Si f possède des dérivées partielles en $(x_0, y_0, z_0) \in U$, le gradient de f en (x_0, y_0, z_0) (noté $\overrightarrow{grad}\, f(x_0, y_0, z_0)$) est le vecteur $\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \end{pmatrix}$.

En physique, le gradient est parfois noté ∇f

II.1.8 Exemple
Calculer le gradient de la première fonction de l'exemple précédent. Attention à ne pas confondre avec les vecteurs obtenus en dérivant (partiellement) une fonction avec $n > 1$.

II.2 Taylor-Young

Cette fois, on énonce les théorèmes dans le cas $p = 2$, pour simplifier l'écriture.

II.2.1 Théorème
Soit $f : U \to \mathbb{R}^n$ une fonction $\mathcal{C}^1$, où U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $(x_0, y_0) \in U$. Pour (h, k) de norme "assez petite"

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0, y_0) + h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \underset{(h,k)\to(0,0)}{o}(\|(h,k)\|)$$

Preuve.
Une idée de preuve.

En admettant que les applications partielles sont de classe $\mathcal{C}^1$, on a déjà (en fixant la deuxième variable)

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0, y_0+k) + h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0+k) + o_{h\to 0}(h)$$

Comme $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue en (x_0, y_0), $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0+k) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + o_{(h,k)\to(0,0)}(\|(h,k)\|)$.

Pour faire le lien entre les o, il faut voir que $|h| \leqslant \|(h,k)\|$ (par croissante de $\sqrt{\cdot}$).

On répète l'opération sur $f(x_0, y_0+k)$ pour obtenir la formule de Taylor. ■

II.2.2 Le petit o

Il s'agit ici d'une fonction de 2 variables $\varphi(h, k)$ telle que $\frac{\varphi(h,k)}{\|(h,k)\|} \underset{(h,k)\to(0,0,0)}{\to} 0_{\mathbb{R}^n}$.

II.2.3 Exemple
Écrire la formule dans le cas de 3 variables.

II.2.4 Corollaire
Une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ est continue.

II.2.5 Cas n = 1

Dans le cas où f est à valeurs réelles, on obtient

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0, y_0) + \langle \overrightarrow{grad}\, f(x_0, y_0), \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \rangle + o(\|(h,k)\|)$$

ou encore, en notant $X_0 = (x_0, y_0)$,

$$f(X) = f(X_0) + \langle \overrightarrow{grad}(f)(X_0), X - X_0 \rangle + o(\|X - X_0\|)$$

II.2.6 Définition
Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables, de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert U. Soit $X_0 = (x_0, y_0) \in U$.

Le plan $\mathcal{P}_0 : z = f(x_0, y_0) + (x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ est le plan tangent à la surface représentative de f au point X_0.

II.2.7 Exemple
Donner le plan tangent à la surface représentative de $f : (x, y) \mapsto \cos(x)\sin(y)$ en $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3})$.

f est $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$ par produit et pour $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = -\sin(x_0)\sin(y_0) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \cos(x_0)\cos(y_0)$$

Ainsi le plan cherché est d'équation

$$z = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4}(x - \frac{\pi}{4}) + \frac{\sqrt{2}}{4}(y - \frac{\pi}{3})$$

II.2.8 Interprétation du gradient

Considérons une fonction $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de deux variables à valeurs réelles.

Soit $M_0 = (x_0, y_0) \in U$ tel que $\overrightarrow{grad}\, f(M_0) \neq \vec{0}$.

1. Considérons la courbe $C : f(x, y) = \lambda$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ est fixé. On a vu que $\overrightarrow{grad}\, f(M_0)$ est normal à C au point M_0.
2. Posons $X = (h, k) \in \mathbb{R}^2$ tel que $M_0 + X \in U$ (ce qui est possible, car U est ouvert). Alors $f(M_0 + X) - f(M_0) = \langle \overrightarrow{grad}\, f(M_0), X \rangle + o_0(\|X\|)$.

   D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, la quantité $\langle \overrightarrow{grad}\, f(M_0), X \rangle$ est maximale lorsque X est positivement proportionnel à $\overrightarrow{grad}\, f(M_0)$.

   Conclusion : $\overrightarrow{grad}\, f(M_0)$ est orienté dans le sens des valeurs croissantes de f (le sens où la croissance est maximale et la direction où la variation est maximale).

II.2.9 Proposition (Composition)
Soit $f : U \to \mathbb{R}^n$ (U ouvert) et $g : t \mapsto (x(t), y(t))$ une fonction définie sur un intervalle I et à valeurs dans U.

Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$, alors $\varphi = f \circ g : t \mapsto f(x(t), y(t))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et pour $t \in I$

$$\varphi'(t) = x'(t)\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) + y'(t)\frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)).$$

Preuve.
Il s'agit d'appliquer la formule de Taylor-Young à $\varphi(t+h) = f(x(t+h), y(t+h)) = f(x(t) + hx'(t) + o(h), y(t) + hy'(t) + o(h))$.

On lit la valeur de $\varphi'(t)$ comme facteur de h, d'après le cours de première année (car φ est une fonction d'une variable).

Or $\varphi(t+h) = f(x(t), y(t)) + (hx'(t) + o(h))\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) + (hy'(t) + o(h))\frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) + o(\|h(x'(t) + o(1), y(t) + o(1))\|)$. Il s'agit maintenant de regrouper les différents o qui sont soit des $o(h)$ soit des fonctions négligeables devant $o(h)$, pour obtenir le résultat voulu. ■

II.2.10 Exemple
On considère $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $g : t \mapsto \begin{pmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\end{pmatrix}$. Calculer la dérivée de $f \circ g$ (évolution d'un champ scalaire le long du cercle unité).

II.2.11 Proposition (Composition, changement de variables)
On considère $f : U \to \mathbb{R}^n$ et $g : V \to \mathbb{R}^p$ où U est un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et V un ouvert de $\mathbb{R}^m$. Si $g(V) \subset U$ et que les fonctions f, g sont de classe $\mathcal{C}^1$ alors $f \circ g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur V.

Si on note $f : (u_1, \dots, u_p) \mapsto f(u_1, \dots, u_p)$ et $g : (x_1, \dots, x_m) \mapsto g(x_1, \dots, x_m)$ et $g = (g_1, \dots g_p)$ les fonctions coordonnées, alors $f \circ g$ dépend des variables $x_1, \dots, x_m$ et pour $i \in [\![1, m]\!]$ et $a \in V$

$$\frac{\partial f \circ g}{\partial x_i}(a) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(a)\frac{\partial f}{\partial u_j}(g(a))$$

Preuve.
On dérive par rapport à une seule variable, que l'on peut noter t et on applique le théorème précédent. ■

II.2.12 Proposition (Un exemple)
Avec les mêmes notations que la proposition précédente.

On note $f : (u, v) \mapsto f(u, v)$ et $g : (x, y) \mapsto \begin{pmatrix}\alpha(x, y)\\ \beta(x, y)\end{pmatrix}$ (f, g sont des fonctions de deux variables et g est à valeurs dans $\mathbb{R}^2$).

Alors $h = f \circ g : (x, y) \mapsto h(x, y) = f(\alpha(x, y), \beta(x, y))$ et on a

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial \alpha}{\partial x}(x_0, y_0)\frac{\partial f}{\partial u}(\alpha(x_0, y_0), \beta(x_0, y_0)) + \frac{\partial \beta}{\partial x}(x_0, y_0)\frac{\partial f}{\partial v}(\alpha(x_0, y_0), \beta(x_0, y_0))$$
$$\frac{\partial h}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial \alpha}{\partial y}(x_0, y_0)\frac{\partial f}{\partial u}(\alpha(x_0, y_0), \beta(x_0, y_0)) + \frac{\partial \beta}{\partial y}(x_0, y_0)\frac{\partial f}{\partial v}(\alpha(x_0, y_0), \beta(x_0, y_0))$$

Pour appliquer cette formule, il faut utiliser la notation ∂_1, ∂_2 ou alors bien différencier la manière dont on note les variables des fonctions en jeu

II.2.13 Exemple
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$ (variables notées x, y) de classe $\mathcal{C}^1$. Calculer les dérivées de $\varphi : (r, \theta) \mapsto f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$.

On trouve

$$\frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) = \cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + \sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

et

$$\frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) = -r\sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + r\cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

II.2.14 Gradient en coordonnées polaires

On reprend les mêmes notations qu'à l'exemple précédent. On cherche à exprimer le gradient en un point $M_0 : (x_0, y_0)$ différent de l'origine, en fonction des coordonnées polaires (r_0, θ_0) de M, c'est-à-dire exprimer le vecteur dont les coordonnées cartésiennes sont $\frac{\partial f}{\partial x}(M_0), \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)$ en fonction de r_0, θ_0, les dérivées de g et des vecteurs $\vec{e_r} = \begin{pmatrix}\cos(\theta_0)\\ \sin(\theta_0)\end{pmatrix}$ et $\vec{e_\theta} = \begin{pmatrix}-\sin\theta_0\\ \cos\theta_0\end{pmatrix}$.

On convient de noter seulement les dérivées partielles dans ce qui va suivre, en considérant qu'on évalue ces dérivées en $M_0 = (x_0, y_0) = (r_0 \cos\theta_0, y_0 \sin\theta_0)$ pour f et en (r_0, θ_0) pour g.

La relation trouvée précédemment s'écrit sous forme matricielle comme

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial r} \\ \frac{\partial g}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_0 & \sin\theta_0 \\ -r_0 \sin\theta_0 & r_0\cos\theta_0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$$

ou encore, en divisant $\frac{\partial g}{\partial \theta}$ par r_0 (pour faire apparaître une matrice de rotation qui est une matrice orthogonale)

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial r} \\ \frac{1}{r_0}\frac{\partial g}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_0 & \sin\theta_0 \\ -\sin\theta_0 & \cos\theta_0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

En multipliant par l'inverse de cette matrice de rotation (qui est sa transposée)

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{\partial g}{\partial r}\vec{e_r} + \frac{1}{r_0}\frac{\partial g}{\partial \theta}\vec{e_\theta}$$

II.2.15 Définition (Dérivées d'ordre supérieur)

Comme pour les fonctions d'une variable, on peut évidemment continuer à dériver des dérivées partielles si elles sont dérivables. On introduit alors la classe $\mathcal{C}^2, \dots$ et les justifications sont les mêmes que pour la classe $\mathcal{C}^1$

La notation est la suivante :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

II.2.16 Exemple

Soit $f : (x, y, z) \mapsto x \arctan(y^2 + z^2)$.

Calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}$

II.2.17 Théorème (Théorème de Schwarz)

Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$, alors $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ (et de même avec toutes les autres variables éventuelles).

II.3 Équations aux dérivées partielles

II.3.1 Exemple

On souhaite résoudre l'équation (où f est définie et $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$)

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 1.$$

Pour cela on effectue le changement de variable $u = x + y, v = x - y$.

On a donc $x = \frac{u+v}{2}, y = \frac{u-v}{2}$. Ceci revient à poser une nouvelle fonction

$$g(u, v) = f(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}) = f(x, y).$$

Le changement de variables est bijectif de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ et donc g est définie sur $\mathbb{R}^2$

Ainsi $\frac{\partial g}{\partial v}(u, v) = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}(u, v) - \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y}(u, v) = \frac{1}{2}$. Ainsi g est de dérivée constante si on ne considère que la variable v. Donc $g(u, v) = \frac{v}{2} + K(u)$ où K est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ qui ne dépend que de la variable u.

Finalement, les solutions sont de la forme $f(x, y) = \frac{x-y}{2} + K(x + y)$.

II.3.2 Exemple

Chercher les solutions f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[\times\mathbb{R}$ vérifiant

$$(E) : x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{x}.$$

Pour cela on pourra passer en coordonnées polaires.

On pose $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$, avec $r \in]0, +\infty[$ et $\theta \in] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. On a alors $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $\theta = \arctan(\frac{y}{x})$.

On pose $g(r, \theta) = f(x, y) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ qui est bien $\mathcal{C}^1$ par composition.

Alors $\frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) = \cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}(r, \theta) + \sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}(r, \theta)$. Ainsi (E) devient $r\frac{\partial g}{\partial r} = \tan(\theta)$ ou encore $\frac{\partial g}{\partial r} = \frac{1}{r}\tan(\theta)$.

Ainsi $g(r, \theta) = \ln(r)\tan(\theta) + K(\theta)$ où K est une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Finalement, $f(x, y) = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2)\frac{y}{x} + C(\frac{y}{x})$ où C est une fonction $\mathcal{C}^1$

II.3.3 Exercice

Résoudre l'équation précédente par changement de variable $u = x$ et $v = \frac{y}{x}$.

II.3.4 Exemple

On considère l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}.$$

c est une constante strictement positive représentant une vitesse de propagation. On cherche une solution $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Résoudre en posant $u = x + ct$ et $v = x - ct$ et calculer la dérivée d'ordre 2 croisée. On pose $g(u,v) = f(x,t) = f(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2c})$ qui est $\mathcal{C}^2$ par composition.

$\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = 0$ et donc $\frac{\partial g}{\partial u} = K(u)$ et finalement $g(u,v) = K_1(u) + K_2(v)$. Il reste à traduire sur f.

III Extrema

III.1 Points critiques

On suppose $p = 2$ pour alléger les notations. La généralisation est immédiate.

III.1.1 Définition
Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction à valeurs **réelles** et $A \subset \mathbb{R}^2$. Soit $a_0 = (x_0, y_0) \in A$. On dit que f possède un maximum local (resp. minimum local) ssi il existe un $r > 0$ tel que

$$\forall (x,y) \in A \cap \overline{B}(a_0, r)\ f(x,y) \leqslant f(x_0, y_0)$$

(resp. $f(x,y) \geqslant f(x_0,y_0)$).

III.1.2 Exemple
Tracer la surface représentative de $f : (x,y) \mapsto \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Maximum local en $(0,0)$. Minima locaux sur le cercle unité. Constater ces faits sur le tracé suivant :

III.1.3 Définition
Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles et $A \subset \mathbb{R}^2$. Un point a **intérieur** à A est appelé **point critique** de f ssi $\overrightarrow{grad}\, f(a) = \vec{0}$ (toutes les dérivées partielles s'annulent simultanément).

III.1.4 Exemple
1. Cas des fonctions numériques : $f : x \mapsto x^3$.
2. Soient $a, b > 0$. Trouver les points critiques de $f : x \mapsto x^2 + 2xy + 2y^2 - 2x + 4y$

III.1.5 Interprétation graphique

- Dans le cas d'une fonction d'une variable, il s'agit de la présence d'une tangente horizontale (qui n'est garantie que lorsque la dérivée s'annule en un point qui n'est pas une borne de l'intervalle de définition).
- Dans le cas d'une fonction de deux variables, le plan tangent en un point critique est horizontal. Il possède une équation de la forme $z = \alpha$ où α est une constante.

III.1.6 Proposition
Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles et $U \subset \mathbb{R}^2$ un **ouvert**. Soit $X_0 \in U$.
Si f possède un extremum local en X_0 alors X_0 est un point crique de f.

Preuve.
Notons $X_0 = (x_0, y_0)$. On considère l'application partielle $f_{y_0} : x \mapsto f(x, y_0)$.

Vu que X_0 est à l'intérieur de U, f_{y_0} est dérivable sur un intervalle ouvert et admet un extremum en x_0 qui n'est pas une borne. Donc sa dérivée s'annule en x_0 ie $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0) = 0$.

On raisonne de même pour chaque dérivée partielle. ∎

III.1.7 Exemple
$A = \overline{B}(O,1)$ et $f : (x,y) \mapsto x^2 + 2y^2$. Trouver les extrema s'il en existe.

Réponse : f est continue par produits et somme sur le fermé A donc possède un minimum et un maximum.

Sur l'ouvert $B(O,1)$, f n'a qu'un point critique en $(0,0)$ et sa valeur est 0 qui est clairement un minimum global. Cherchons le maximum de f sur la frontière.

On paramètre les points de la frontière par $x = \cos(t)$ et $y = \sin(t)$ pour un $t \in [-\pi, \pi]$ et on pose

$$g \left\{ \begin{array}{rcl} [-\pi,\pi] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & f(x(t), y(t)) \end{array} \right. = \cos^2(t) + 2\sin^2(t)$$

g est clairement paire, on l'étudie sur $[0,\pi]$. Pour $t \in [0,\pi]$, $g(t) = 1 + \sin^2(t)$ qui est maximale quand $\sin^(t) = 1$ ie $t = \frac{\pi}{2}$.

Ainsi, f est maximale en $(0,1)$ et $(0,-1)$ et sa valeur maximale est 2.

III.2 Matrice hessienne

III.2.1 Théorème (Taylor-Young, ordre 2)
Soit $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$ où U est un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$. Soit $(x_0, y_0) \in U$ et $(h,k) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(x_0 + h, y_0 + k) \in U$.

$$\begin{aligned} f(x_0+h, y_0+k) =& f(x_0,y_0) + h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) + \\ & \frac{1}{2!}\left(h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)\right) \\ & + o_0(h^2+k^2). \end{aligned}$$

Il faut comprendre ce o_0 comme représentant une limite quand $(h,k) \to (0,0)$.

Preuve.
Admis ■

III.2.2 Définition
Soit $f \in \mathcal{C}^2(U,\mathbb{R})$ où U est un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$.

Soit $(x_0,y_0) \in U$ fixé. La **matrice hessienne** de f au point (x_0,y_0) est la matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

III.2.3 Réécriture de la formule de Taylor

On se place dans le même cadre que le théorème, on note $X = \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$ et H la matrice hessienne de f en $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$.

On a alors

$$f(X_0 + X) = f(X_0) + (X|\overrightarrow{grad}\, f(X_0)) + \frac{1}{2}X^T H X + o_0(\|X\|^2)$$

III.3 Étude des extrema

III.3.1 Théorème
Soit $f \in \mathcal{C}^2(U,\mathbb{R})$ où U est un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$. Soit $X_0 \in U$ un point critique de f.

Notons également H la matrice hessienne de f au point X_0 et λ, μ ses valeurs propres réelles.

Cas $\lambda, \mu > 0$ **:** f atteint un minimum local en X_0.

Cas $\lambda, \mu < 0$ **:** f atteint un maximum local en X_0.

Cas λ, μ **de signes stricts opposés :** f n'a ni maximum local ni minimum local en X_0. On a un **point selle** ou **point col** en X_0.

Cas $\lambda\mu = 0$ **:** on ne peut pas conclure directement.

Remarquons que $\det(H) = \lambda\mu$ et $\mathrm{tr}(H) = \lambda + \mu$. Ainsi on pourra distinguer les 4 cas précédents sans connaître λ ni μ.

Preuve.
On se place dans le cadre où f possède un point critique en X_0 fixé.

On a alors $\overrightarrow{grad}\, f(X_0) = 0$. Ainsi $f(X_0 + X) - f(X_0) = \frac{1}{2}X^T H X + o_0(\|X\|^2)$ et $f(X_0 + X) - f(X_0)$ est du signe de $\frac{1}{2}X^T H X$ quand X est au voisinage de 0.

Réduisons la matrice H (qui dépend de X_0...) : il existe $P \in O_2(\mathbb{R})$ et $D = \mathrm{diag}(\lambda,\mu)$ telles que $H = PDP^{-1}$.

Alors pour $X \in \mathbb{R}^2$, $X^T H X = (P^{-1}X)DP^{-1}X = X'^T D X' = \lambda h'^2 + \mu k'^2$ en notant $X' = P^{-1}X = \begin{pmatrix} h' \\ k' \end{pmatrix}$

Ainsi $f(X_0+X) - f(X_0)$ est du signe de $\lambda h'^2 + \mu k'^2$ pour h, k (ou h', k') "proche" de 0, lorsque cette quantité ne s'annule qu'en (0, 0). ■

III.3.2 Exemple

Considérons $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x^4 + y^4 - (x-y)^2 \end{cases}$. Trouvons les éventuels extrema.

Tout d'abord, f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$ en tant que fonction polynomiale.

— Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3 - 2(x-y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y^3 + 2(x-y)$.

—

$$\overrightarrow{grad}\, f(x,y) = 0 \iff \begin{cases} 4x^3 - 2(x-y) = 0 \\ 4y^3 + 2(x-y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4x^3 - 2(x-y) = 0 \\ x^3 + y^3 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 4x^3 - 4x = 0 \\ y = -x \end{cases} \iff x(x^2-1) = 0 \text{ et } y = -x$$

On a trois solutions : $A = (0,0),\ B = (-1,1),\ C = (1,-1)$.

— Calculons maintenant la matrice hessienne au point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 2 & 2 \\ 2 & 12y^2 - 2 \end{pmatrix}$$

En A, $H(A)$ est de rang 1. Comme $tr(H(A)) = -4$, les valeurs propres sont 0 et -4. Pour conclure, remarquer que $f(x,x) \geqslant 0$ mais $f(x,-x) \leqslant 0$ pour $x \in [-1,1]$ et donc $0 = f(0,0)$ n'est ni un minimum ni un maximum.

En B et C, $H = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$. $\det(H) = 96 > 0$ et $tr(H) = 20$ donc f possède un minimum local en ces deux points, qui vaut $f(B) = f(C) = -2$.

III.3.3 Exemple
Étudier les extrema de $f : \begin{cases} \mathbb{R} \times]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & y(x^2 + (\ln(y))^2) \end{cases}$

f est $\mathcal{C}^2$ sur son ensemble de définition par produits et somme. De plus, pour $x \in \mathbb{R}, y > 0$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 + (\ln(y))^2 + y \times 2\frac{1}{y}\ln(y) = x^2 + \ln(y)(\ln(y)+2).$$

Les points critiques de f sont $(0,1)$ et $(0, e^{-2})$.

En $(0,1)$, $f(0,1) = 0$ qui est clairement un minimum global. En $(0, e^{-2})$, $f(0, e^{-2}) = 4e^{-2}$.

Calculons la matrice hessienne. $H(x,y) = \begin{pmatrix} 2y & 2x \\ 2x & 2\frac{\ln(y)}{y} + \frac{2}{y} \end{pmatrix}$ En $(0, e^{-2})$ on obtient $\begin{pmatrix} 2e^{-2} & 0 \\ 0 & -2e^{2} \end{pmatrix}$ de déterminant $-4 < 0$. f n'a ni minimum local ni maximum local en ce point.

Index