

### **Théorème spectral**

- Produit scalaire canonique dans  $\mathbb{R}^n$  : définition par une somme, par un produit matriciel. Propriétés.
- Norme euclidienne : propriétés et lien avec le produit scalaire (définition, identité de polarisation).
- Vecteurs et espaces orthogonaux. Famille orthogonale, orthonormale.
- Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace de  $\mathbb{R}^n$ .
- Matrices orthogonales : définition par la transposition. Caractérisations. Écriture des formules de changement de BON.
- Matrices symétriques réelles : les espaces propres sont orthogonaux, théorème spectral.
- Orthogonalisation et orthonormalisation de Gram-Schmidt.

### **Révisions**

- Définition d'un point régulier d'une courbe paramétrée.
- Savoir établir l'équation de la tangente en un point régulier d'une courbe.
- Définition de valeur propre et vecteur propre.

### **Questions de cours**

1. Une famille orthogonale de vecteurs tous non nuls est libre.
2. Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .  $A$  est symétrique ssi  $\forall X, Y \in \mathbb{R}^n \langle AX, Y \rangle = \langle X, AY \rangle$ .
3. Montrer que  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  est diagonalisable et donner une base orthonormée de vecteurs propres.