Devoir surveillé n°4

Durée : 4 H. Calculatrices interdites. **Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction et la propreté : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.**

Lisez l'énoncé attentivement et en entier **AVANT** de commencer chaque exercice.

Exercice 1 (Questions de cours)

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction paire et dérivable. Montrer que f' est impaire.
2. Donner les développements en séries entières de $x \mapsto \frac{1}{1-2x}$ et exp.
3. Dans $\mathbb{R}^2$, on considère la droite vectorielle $\mathcal{D} : 2x - y = 0$.
   (a) Donner un vecteur directeur unitaire (de norme 1) $\vec{u}$ de $\mathcal{D}$.
   (b) Donner une base orthonormée directe $(\vec{u}, \vec{v})$ de $\mathbb{R}^2$ dont le premier vecteur est $\vec{u}$.
   (c) Soit $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Donner les coordonnées de son projeté orthogonal $p(X_0)$ sur la droite $\mathcal{D}$.
4. On considère la fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & 2x^3 - 6xy + 3y^2 \end{array} \right.$.
   (a) Justifier rapidement que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
   (b) Calculer les dérivées partielles de f.
   (c) Trouver tous les points critiques de f, c'est-à-dire les valeurs de (x, y) telles que $\overrightarrow{grad}\, f(x,y) = \vec{0}$.

Exercice 2

Partie I : étude de quelques polynômes

On note $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \exp(-x^2) \end{array} \right.$.

1. Justifier que f est l'unique solution de l'équation différentielle
$$y' + 2xy = 0$$
qui prend la valeur 1 en 0.
2. Calculer les dérivées f', f'' et $f^{(3)}$ (la dérivée troisième de f).
3. On souhaite maintenant montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une fonction polynomiale H_n telle que
$$\forall n \in \mathbb{N} \;\; f^{(n)}(x) = H_n(x) f(x)$$
où $f^{(n)}$ désigne la dérivée n-ième de f.
   (a) Exhiber les fonctions H_0, H_1, H_2, H_3. Rappelons que $f^{(0)} = f$.
   (b) Montrer que H_n existe bien pour tout $n \in \mathbb{N}$ et préciser son degré.
   Montrer également que H_n a la même parité que l'entier n.
   (c) On note $a(H_n)$ le coefficient dominant de H_n. Donner une relation entre $a(H_{n+1})$ et $a(H_n)$ et en déduire $a(H_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Partie II : étude d'intégrales

Pour tout entier naturel n, on pose
$$I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2} \mathrm{d}x, \;\; J_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n e^{-x^2} \mathrm{d}x$$
et on donne
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$$

1. Soit g une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que si la fonction g est paire, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ converge si, et seulement si, $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ converge.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n et J_n sont des intégrales convergentes.
3. Donner, pour tout entier naturel n pair, une relation entre I_n et J_n.
   Que vaut J_n lorsque l'entier n est impair ?
4. Calculer I_1.
5. Déterminer, pour tout entier naturel n, une relation entre I_n et I_{n+2}.
6. Soit k un entier naturel. Montrer que
$$I_{2k} = \frac{(2k)!}{2^{2k}k!}\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$
   et exprimer I_{2k+1} en fonction de k.
7. (a) Soit P une fonction polynomiale. Montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(x)e^{-x^2}\mathrm{d}x$ est une intégrale convergente.
   (b) Soit Q une fonction polynomiale telle que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} Q(x)^2e^{-x^2}\mathrm{d}x = 0$. Montrer que Q est la fonction nulle.
   (c) On pose maintenant
$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X]\times\mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R} \\ (P_1,P_2) & \mapsto & \frac{1}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P_1(x)P_2(x)e^{-x^2} \end{array} \right.$$
   Montrer que φ est symétrique, bilinéaire et positive, c'est-à-dire que
   — $\forall P_1,P_2 \in \mathbb{R}[X]\ \varphi(P_1,P_2) = \varphi(P_2,P_1)$
   — $\forall P_1,P_2,P_3 \in \mathbb{R}[X]\ \forall \alpha,\beta\in\mathbb{R}\ \varphi(\alpha P_1+\beta P_2,\ P_3) = \alpha\varphi(P_1,P_3)+\beta\varphi(P_2,P_3)$
   — $\forall P_1,P_2,P_3 \in \mathbb{R}[X]\ \forall \alpha,\beta\in\mathbb{R}\ \varphi(P_3,\ \alpha P_1+\beta P_2) = \alpha\varphi(P_3,P_1)+\beta\varphi(P_3,P_2)$
   — $\forall P \in \mathbb{R}[X]\ \varphi(P,P) \geqslant 0$.

   Ces propriétés (ajoutées à la question précédente) sont exactement celles d'un produit scalaire ! Dans la suite, on notera $\langle P_1,P_2\rangle$ au lieu de $\varphi(P_1,P_2)$ en gardant en tête que notre produit scalaire est en fait φ.
   (d) Montrer que $\langle H_0,H_1\rangle = 0$.
   (e) Soit $n,p\in\mathbb{N}$. Donner la parité de $x\mapsto H_{2n}(x)H_{2p+1}(x)$ et calculer $\langle H_{2n},H_{2p+1}\rangle$.
   Rappelons que les polynômes H_n ont été définis dans la première partie.
   (f) On note $F = \mathrm{Vect}(H_0,H_1,H_2)$. Donner la dimension de F puis une base orthonormée de F (où on utilise le produit scalaire défini par φ).

Exercice 3
Dans cet exercice, on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} \frac52 & 1 & \frac12 \\ 1 & 2 & 1 \\ \frac12 & 1 & \frac52 \end{pmatrix}$

Partie I : étude de A

1. Justifier que la matrice A est diagonalisable.
2. Déterminer les valeurs propres de A.
3. Déterminer une matrice diagonale D et une matrice orthogonale $P\in O_3(\mathbb{R})$ telles que $A = PDP^{-1}$.
   Les coefficients de D seront classés par ordre croissant et les coefficients de la première ligne de P seront tous positifs.
4. **Démontrer** que pour tout entier naturel n, $A^n = PD^nP^{-1}$.
5. En déduire A^n pour tout entier naturel n.
6. Soient A', D', P' trois matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que D' est diagonale, P' est orthogonale, et $A' = P'D'P'^{-1}$.
   Montrer que A' est symétrique.

Partie II

Dans cette partie on confond une matrice à une ligne et une colonne avec son unique coefficient.
Pour toute matrice M, on note M^T sa transposée.
On note $\mathcal{B} = (i, j, k)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\langle\ ,\ \rangle$ le produit scalaire canonique.
La matrice A est toujours celle définie précédemment, et on note f son endomorphisme canoniquement associé.
Pour tous vecteurs u, v de $\mathbb{R}^3$, on note U, V les matrices colonnes des coordonnées de u, v dans $\mathcal{B}$ et on définit $\varphi(u, v) = U^T AV$.

1. Déterminer U lorsque $u = -i + 2j + 3k$.
2. Pour tout vecteur $u \in \mathbb{R}^3$ (de matrice colonne U dans $\mathcal{B}$), on considère la matrice colonne $U' = P^T U = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ où P est la matrice déterminée à la question 3 de la partie I.
   (a) Montrer que $\varphi(u, v) \in \mathbb{R}$.
   (b) Montrer que φ est symétrique et bilinéaire, c'est-à-dire :
   — $\forall u, v \in \mathbb{R}^3\ \varphi(u, v) = \varphi(v, u)$
   — $\forall u, v, w \in \mathbb{R}^3\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}\ \varphi(\alpha u + \beta v, w) = \alpha\varphi(u, w) + \beta\varphi(v, w)$
   — $\forall u, v, w \in \mathbb{R}^3\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}\ \varphi(w, \alpha u + \beta v) = \alpha\varphi(w, u) + \beta\varphi(w, v)$
   (c) Que représente la colonne U' pour le vecteur u ? On sera le plus précis possible.
   (d) Exprimer $\varphi(u, u)$ en fonction de D et U' puis en fonction de x', y', z'.
   (e) En déduire que $\varphi(u, u) \geqslant 0$ et que $(\varphi(u, u) = 0_{\mathbb{R}} \iff u = 0_{\mathbb{R}^3})$.
   On a démontré que φ possède les mêmes propriétés que le produit scalaire canonique.
3. (a) Soient u, v deux vecteurs propres de f associés à des valeurs propres distinctes.
   Montrer que $\varphi(u, v) = 0$.
   (b) En déduire une base (u_1, u_2, u_3) de $\mathbb{R}^3$ telle que

$$\forall r, s \in [\![1, 3]\!]\ \varphi(u_r, u_s) = \delta_{r,s} = \begin{cases} 0 \text{ si } r \neq s \\ 1 \text{ si } r = s \end{cases}$$

Pour un vecteur $u \in \mathbb{R}^3$ on note F_u son espace vectoriel orthogonal $(F_u = (Vect(u))^\perp)$ et F'_u l'ensemble

$$F'_u = \{v \in \mathbb{R}^3;\ \varphi(u, v) = 0\}$$

4. Montrer, pour un $u \in \mathbb{R}^3$, que F'_u est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
5. Justifier que si u est un vecteur propre de f, alors $F_u = F'_u$.
6. (a) Donner une base de F_i où i est le premier vecteur de la base canonique $\mathcal{B}$.
   (b) Déterminer une base de F'_i.
   (c) A-t-on $F_i = F'_i$? Déterminer une base de $F_i \cap F'_i$.
7. (a) Soient u, v deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Démontrer que si $v \in F'_u$ alors $f(v) \in F_u$.
   (b) Démontrer que pour tous vecteurs v et w de $\mathbb{R}^3$, $\langle f(v), w\rangle = \langle v, f(w)\rangle$.
8. Soit u un vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$ tel que $F_u = F'_u$
   (a) Démontrer que $f(F_u) = F_u$ à l'aide de la question 7.
   (b) En déduire que $f(u)$ est orthogonal à F_u, puis, que u est un vecteur propre de f.

Exercice 4 (Bonus)
On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x^2-1}$.

1. Justifier que f est continue sur $]0, 1[$ et, pour $x \in]0, 1[$, exprimer $f(x)$ sous forme d'une série convergente.
2. Montrer que f est intégrable sur $]0, 1]$ et exprimer $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t^2 - 1}\mathrm{d}t$ sous forme d'une somme de série convergente.
3. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t^2 - 1}\mathrm{d}t$ en admettant que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 5 (Bonus)
En reprenant la fonction φ de l'exercice 2 comme produit scalaire, Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$, on a $\langle H_0, H_n\rangle = 0$ puis calculer $\langle H_p, H_q\rangle$ pour tous $p, q \in \mathbb{N}$