I Les définitions

On considère un espace vectoriel E et deux sous espaces supplémentaires F, G : $F \oplus G = E$.
Pour un $x \in E$, on note $x = x_F + x_G$ son unique décomposition en somme avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$.

— Le projeté de x sur F parallèlement à G est $p(x) = x_F$.

— Le symétrique de x par rapport à F et parallèlement à G est $s(x) = x_F - x_G$

— On a alors $s(x) = 2p(x) - x$.

— $p(x) \in F$ et $x - p(x) \in G$.

— Lorsque cela a du sens (on peut calculer des produits scalaires), p est un projecteur orthogonal (et s une symétrie orthogonale) ssi $F \perp G$, c'est-à-dire $F = G^{\perp}$ et $G = F^{\perp}$.

Les applications p, s sont des endomorphismes de E.

II Les savoirs faire

II.1 Calculs géométriques

— Si on donne F et G (dans le cas d'une projection/symétrie orthogonale $G = F^{\perp}$ est donné implicitement), on détermine le projeté $p(x)$ de x en résolvant

$$\begin{cases} p(x) \in F \\ x - p(x) \in G \end{cases}$$

Il y a toujours deux conditions géométriques, la deuxième est une orthogonalité pour les projecteurs orthogonaux.

— Suivant les cas, il peut être plus efficace de calculer $x - p(x)$.

— Pour déterminer le symétrique $s(x)$ de x, on calcule ensuite $s(x) = 2p(x) - x$.

II.2 Calculs algébriques

— $f \in \mathcal{L}(E)$ est un projecteur ssi $f \circ f = f$.
Dans ce cas, f est le projecteur sur $F = \ker(f - Id) = E_1(f)$ et parallèlement à $G = \ker(f) = E_0(f)$.

— $f \in \mathcal{L}(E)$ est une symétrie ssi $f \circ f = Id_E$.
Dans ce cas, s est la symétrie par rapport à $F = \ker(f - Id) = E_1(f)$ et parallèlement à $G = \ker(f + Id_E) = E_{-1}(f)$.

— En pratique, il faut savoir exhiber F et G lorsque f est donné matriciellement.

II.3 Matrices réduites

On se place dans le cas où E est de dimension finie

— Interpréter F et G comme des espaces propres.

— Savoir donner les matrices de s, p dans une base adaptée à $F \oplus G = E$.

— Savoir justifier que $\mathrm{rg}(p) = \mathrm{tr}(p)$.

— Savoir donner, sans justification, les matrices de symétries et de projections orthogonales classiques dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ (sur un axe de coordonnées, sur un plan de coordonnées ((xOy) par exemple)). Dans ce cas, la base canoniques est une base de vecteurs propres !

III Quelques résultats classiques

— Si p est un projecteur et $p \neq Id_E$ alors p n'est pas bijectif.

— Une symétrie s est toujours bijective et $s^{-1} = s$.

— Une symétrie et un projecteur sont diagonalisables (en dimension finie).

— Si p' les le projecteur sur G parallèlement à F et s' est la symétrie associée, alors

$$p + p' = Id_E, \; s' + s = 0_{\mathcal{L}(E)}, \; p' = Id_E - p', \; s = -s$$

IV Pour aller plus loin

Une fois les points précédents acquis, nous pouvons nous diriger vers des questions type concours.

— Déterminer les dimensions de F et G en étudiant la trace.

— Construire F ou G comme somme directe d'autres espaces (propres par exemple).
  Ce qui mène à...

— Décomposer un endomorphisme diagonalisable comme combinaison linéaire de projecteurs.

— Justifier, par le théorème de Pythagore, que si p est un projecteur orthogonal, alors $\forall x \in E \ \|p(x)\| \leqslant \|x\|$.

— Utiliser, dans un exercice théorique, le fait que $F = E_1(p) = E_1(s)$.