Composition

Exercice 1
Calculer les domaines de définition et ceux de continuité des fonctions :

1. $x \mapsto \tan \frac{1}{x}$.
2. $x \mapsto \ln(\cos x)$
3. $x \mapsto E(x^2)$
4. $x \mapsto \sqrt{e^x - x - 1}$.

Exercice 2
On pose $u_0 > 0$ *et* $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.
Montrer que cette suite admet une limite et la calculer.

Limites et prolongements

Exercice 3
Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{0} xE\left(\frac{1}{x}\right)$.
2. $\lim\limits_{+\infty} xE\left(\frac{1}{x}\right)$.
3. $\lim\limits_{+\infty} \left(\frac{\ln x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$.
4. $\lim\limits_{+\infty} \frac{\ln(\ln x) - 2^{-x}}{x^{-3} + 3^{-x}}$.
5. $\lim\limits_{+\infty} (\ln x + \sin x)^2$.
6. $\lim\limits_{-\infty} \frac{\sin(e^x) + e^{\sin x} + x^2}{\sqrt{x^2+1}}$
7. $\lim\limits_{0} x \sin \frac{1}{x}$.
8. $\lim\limits_{+\infty} \sin(\frac{1}{x}) e^{\cos x}$
9. $\lim\limits_{\frac{\pi}{2}} \tan x \tan 2x$
10. $\lim\limits_{+\infty} \frac{(\ln(\ln x))^2 - \cos^5 x + \ln x}{2^x - \pi^{1000} x^6}$.
11. $\lim\limits_{1} \frac{e^{x^2+x} - e^2 x}{\cos(\frac{\pi x}{2})}$

Exercice 4
Etudier les fonctions, en précisant leurs limites aux bornes des ensembles de définition :

$$f : x \mapsto \frac{x \ln x}{x - 1}, \ g : x \mapsto \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) \ \text{et } h : x \mapsto (1 + x^2)^{\frac{1}{x}}$$

On prolongera par continuité ces fonctions si possible. Dans ce cas, l'étude des tangentes au(x) point(x) de prolongement est attendue.

Calcul d'image

Exercice 5
Calculer l'image de $\mathbb{R}^+$ *par les applications :* $x \mapsto \frac{2x}{3x+2}$, $x \mapsto \sqrt{x^2 + 2}$, $x \mapsto \arctan(2x - 1)$.

Les grands théorèmes

Exercice 6
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction décroissante telle que* $f(x) + f(x+1) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$. *Etudier la limite de* f *en* $+\infty$.

Exercice 7
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ *avec* $a < b$. *Soient de plus* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$. *On suppose :*
— f *et* g *sont continues sur* $[a, b]$
— $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} g$

Montrer que les courbes représentatives de f *et* g *possèdent un point en commun.*

Exercice 8
1. *Soit* $n \in \mathbb{N}$. *Montrer que l'équation* $\tan x = x$ *possède une unique solution dans* $]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi[$. *On note* u_n *cette unique solution.*
2. *Montrer que* (u_n) *possède une limite et la calculer.*
3. *Trouver un équivalent de* (u_n) *en* $+\infty$.
4. *Montrer que pour tout* $x > 0$ *on a* $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$.
5. *On pose* $v_n = u_n - n\pi$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$. *Exprimer* $\tan(v_n)$ *puis* v_n *d'une autre manière.*
6. *En déduire un développement de* v_n *puis un développement de* u_n.