Devoir maison n°11

À rendre le 06/02

Exercice 1
On considère la conique $\mathcal{C}$ dont l'équation dans le repère canonique $\mathcal{R} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est

$$\mathcal{C} : x^2 - \frac{1}{4}y^2 + 2x + y = 2$$

On pose également $f : (x, y) \mapsto x^2 - \frac{1}{4}y^2 + 2x + y - 2$ définie sur $\mathbb{R}^2$.

1. Trouver le point Ω tel que, dans $\mathcal{R}' = (\Omega, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, l'équation de $\mathcal{C}$ soit réduite et donner cette équation réduite.
2. Tracer $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{R}$ en faisant figurer le repère $\mathcal{R}'$.
3. Donner tous les points critiques de f. Que remarquez-vous ?
4. ($\star$) On pose maintenant $g : (u, v) \mapsto \frac{u^2}{4} - \frac{v^2}{16} - 1$. Quel est le seul point critique de g ? Quelle interprétation géométrique peut-on en faire ?

Exercice 2
On considère maintenant $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$ et la fonction

$$f \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey \end{array} \right.$$

1. Montrer que f possède un unique point critique ssi $b^2 - 4ac \neq 0$.
   Dans la suite on considère que cette condition est vérifiée.
2. Montrer que H, la matrice hessienne de f, ne dépend pas du point où on la calcule et traduire la condition précédente sur H.
3. ($\star$) Soit $P = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in O_2(\mathbb{R})$. On pose maintenant

   $$g : \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto f\begin{pmatrix} \alpha u + \beta v \\ \gamma u + \delta v \end{pmatrix} = f(P\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix})$$

   On note $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ l'unique point critique de f.
   Montrer que g possède un unique point critique que l'on exprimera en fonction de P et X_0.
4. ($\star$) Montrer que si l'on effectue un changement de repère par translation, la fonction h obtenue possède un unique point critique que l'on exprimera en fonction de X_0.
5. On considère la conique $Co : f(x, y) = k$ où $k \in \mathbb{R}$ est tel que $\mathcal{C}$ n'est pas dégénérée (c'est une vraie conique et par un unique point, ni une réunion de droite, ...)
   Montrer que f est soit une ellipse, soit une hyperbole et que son centre est en X_0.

Indications

Exercice 1

1. Il y a deux mises sous forme canonique à effectuer. Ne pas oublier de factoriser pour celle sur y.
2.
3.

Exercice 1

1. Poser la matrice du système linéaire obtenu.
2. Calculer H en un (x, y).
3. Le gradient de g, noté en colonne, s'exprime en fonction du gradient de f.
4. Poser des notations pour traduire le changement de repère comme un changement de variable sur f.
5. On connaît un renseignement sur $\det(H)$ qui nous donne une indication sur la nature de la conique f.