

I Droites et plans

I.1 Droites du plan



Dans $\mathbb{R}^2$, on considère deux vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$.

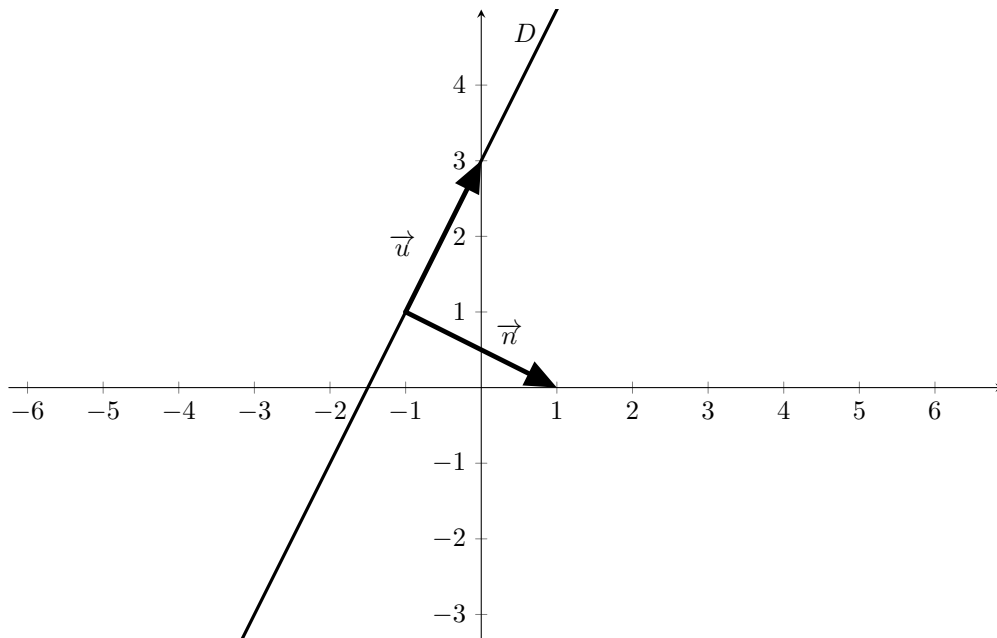
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ssi $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ (déterminant dans n'importe quelle base).
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux ssi $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$

I.1.1 Équation, cas général

Une droite $\mathcal{D}$ du plan possède une équation de la forme

$$\mathcal{D} : ax + by + c = 0 \text{ où } (a, b) \neq (0, 0)$$

Le vecteur $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est normal à $\mathcal{D}$ et donc $\vec{u} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$, qui est orthogonal à $\vec{n}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.



I.1.2 Interprétation des vecteurs

Notons $A \in \mathcal{D}$ un point de $\mathcal{D}$ (quelconque) et M un point du plan.

$$M \in \mathcal{D} \iff \overrightarrow{AM} \text{ et } \vec{u} \text{ sont colinéaires}$$

$$M \in \mathcal{D} \iff \overrightarrow{AM} \text{ et } \vec{n} \text{ sont orthogonaux}$$

I.1.3 Les points

Les points de $\mathcal{D}$ sont les couples de coordonnées solutions de l'équation.

Trouver un point de $\mathcal{D}$ revient à trouver une solution évidente de l'équation.

I.1.4 Vecteurs directeurs

Les vecteurs directeurs de $\mathcal{D}$ sont les vecteurs **non nuls** dont les coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ vérifient l'équation homogène, c'est-à-dire

$$ax + by = 0 \text{ (c'est la traduction de } \langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \vec{n} \rangle = 0 \text{)}$$

Ainsi, $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est une solution évidente, mais ce n'est pas la seule !

I.1.5 Droites affines

C'est le nom qu'on donne aux droites d'une manière générale. Avec les notations précédentes, on peut écrire

$$\mathcal{D} = A + \text{Vect}(\vec{u}) = \{M; \exists t \in \mathbb{R} M = A + t\vec{u}\} = \{M; \overrightarrow{AM} \in \text{Vect}(\vec{u})\}$$

en remarquant que $\overrightarrow{AM} = M - A$, car $M = A + \overrightarrow{AM}$.

$\text{Vect}(\vec{u})$ est une droite vectorielle qui est appelée la direction de $\mathcal{D}$. C'est la droite parallèle à $\mathcal{D}$ qui passe par l'origine.

I.1.6 Paramétrisation

On déduit immédiatement une forme paramétrée pour notre droite $\mathcal{D}$, en notant $A = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$:

$$\begin{cases} x = x_A - bt \\ y = y_A + at \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

qui permet de traiter $\mathcal{D}$ comme une courbe paramétrée

I.1.7 La constante c

On vient de voir que $\vec{n}$ et $\vec{u}$ sont imposés par a, b , les coefficients de x et y dans l'équation. Ces deux vecteurs définissent la direction $\text{Vect}(\vec{u})$.

$$\text{Vect}(\vec{u}) : ax + by = 0$$

Si $\mathcal{D}$ n'est pas une droite vectorielle (ie. ne passe pas par l'origine), la constante c est déterminée par un point de $\mathcal{D}$ qui doit vérifier l'équation.

I.1.8 Méthodes

1. Pour exploiter une équation donnée : trouver un vecteur directeur et un vecteur normal en lisant l'équation, puis deviner les coordonnées d'un ou de plusieurs point(s) suivant les besoins de l'énoncé.
2. Pour établir une équation, la méthode varie suivant les données de l'énoncé.
 - (a) Si on donne un point et un vecteur (directeur ou normal), alors les constantes a, b sont déterminées par le vecteur et on calcule c pour que la droite passe bien par le point donné.
 - (b) Si la droite est donnée par deux points A, B , on en déduit un vecteur directeur ($\overrightarrow{AB} = B - A$, car $B = A + \overrightarrow{AB}$) et on applique le point précédent.
 - (c) Dans les autres cas, la direction de $\mathcal{D}$ est donnée par une condition géométrique (parallèle à..., orthogonale à ...) qui donne en fait un vecteur directeur ou normal et on revient au point 1.

I.1.9 Coefficients directeurs, pentes

C'est un cas classique où un vecteur est sous-entendu.

Une droite de pente (=coefficient directeur) $k \in \mathbb{R}$ est en fait dirigée par $\begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix}$ (quand x avance de 1, y monte de k), c'est-à-dire normale à $\begin{pmatrix} -k \\ 1 \end{pmatrix}$ (on vérifie bien que le produit scalaire entre ces vecteurs est nul).

Ainsi son équation est de la forme $-kx + y + c = 0$ ou encore $y = kx - c$ et on détermine c grâce à un point connu de la droite.

I.1.10 Ordonnée à l'origine

C'est une manière (légèrement) détournée de donner un point d'une droite. Dire que l'ordonnée à l'origine vaut $\alpha \in \mathbb{R}$, c'est dire que le point $\begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \end{pmatrix}$ (on donne l'ordonnée) est sur la droite.

Si on combine les deux points précédents, on arrive au fait qu'une droite de pente k et d'ordonnée à l'origine α est d'équation

$$y = kx + \alpha$$

Tadam !

Limitation : ce genre d'équation ne peut pas représenter une droite verticale.

Exercices d'entraînement

1. Pour un $t \in \mathbb{R}$, on considère le point $A = \begin{pmatrix} 2 \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$ et le vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} -2 \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$.

- (a) Donner une équation de $\mathcal{D}_t$ passant par A et dirigée par $\vec{u}$.
- (b) Pour quel(s) $t \in [-\pi, \pi]$ la droite $\mathcal{D}_t$ est-elle horizontale ? Verticale ?

2. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on considère la droite

$$\mathcal{D}_\alpha : (1 - \alpha)x + \alpha y = 1$$

- (a) Montrer que l'équation donnée définit bien une droite et donner un vecteur directeur de $\mathcal{D}_\alpha$.
- (b) À quelle condition sur α, β avons-nous $\mathcal{D}_\alpha \perp \mathcal{D}_\beta$?
- (c) Montrer que $\mathcal{D}_\alpha$ n'est jamais parallèle à $\Delta : y = x$.
- (d) Bonus : existe-t-il d'autres directions que $\mathcal{D}_\alpha$ ne peut jamais avoir ?

I.2 Plans de l'espace



Dans $\mathbb{R}^3$, on considère trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont coplanaires (liés) ssi $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$ (déterminant dans n'importe quelle base).
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux ssi $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ssi $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.
- $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est toujours orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$
- Si $\vec{u} \wedge \vec{v} \neq \vec{0}$ alors la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ est directe.

I.2.1 Équation, cas général

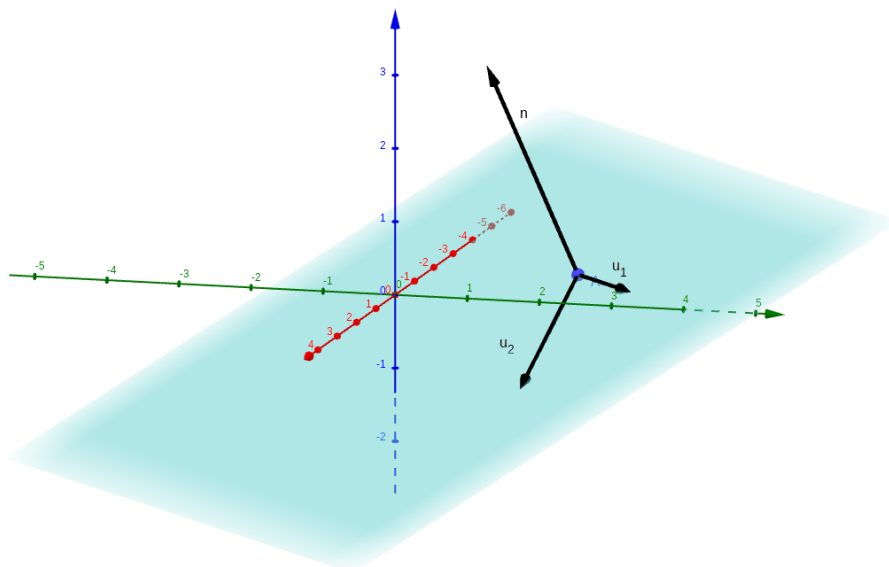
Un plan $\mathcal{P}$ de l'espace possède une équation de la forme

$$\mathcal{P} : ax + by + cz + d = 0 \text{ où } (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$$

Le vecteur $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est normal à $\mathcal{P}$.

On ne peut pas parler de UN vecteur directeur $\vec{u}$ de $\mathcal{P}$, mais plutôt d'une base de deux vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ qui doivent vérifier

$$\vec{u}_1 \perp \vec{n} \text{ et } \vec{u}_2 \perp \vec{n} \text{ et } \vec{u}_1, \vec{u}_2 \text{ ne sont pas colinéaires}$$



I.2.2 Interprétation des vecteurs

Notons $A \in \mathcal{P}$ un point de $\mathcal{P}$ (quelconque) et M un point de l'espace.

$$M \in \mathcal{D} \iff \overrightarrow{AM}, \vec{u}_1, \vec{u}_2 \text{ sont coplanaires}$$

$$M \in \mathcal{D} \iff \overrightarrow{AM} \text{ et } \vec{n} \text{ sont orthogonaux}$$

Pour traduire que 3 vecteurs sont coplanaires, on utilise le fait que le déterminant (dans la base canonique) doit être nul.

I.2.3 Les points

Les points de $\mathcal{P}$ sont les triplets de coordonnées solutions de l'équation.

Trouver un point de $\mathcal{P}$ revient à trouver une solution évidente de l'équation. On essaie généralement de prendre une des coordonnées nulle.

I.2.4 Vecteurs de base

Les vecteurs de base de $\mathcal{P}$ sont les vecteurs **non nuls** et **non colinéaires** dont les coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ vérifient l'équation homogène, c'est-à-dire

$$ax + by + cz = 0 \quad (\text{c'est la traduction de } \langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \vec{n} \rangle = 0)$$

I.2.5 Plans affines

Avec les notations précédentes, on peut écrire

$$\mathcal{P} = A + \text{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = \{M; \exists t, s \in \mathbb{R} \ M = A + t\vec{u}_1 + s\vec{u}_2\} = \{M; \overrightarrow{AM} \in \text{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2)\}$$

en remarquant que $\overrightarrow{AM} = M - A$, car $M = A + \overrightarrow{AM}$.

$\text{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ est un plan vectoriel qui est appelé la direction de $\mathcal{P}$. C'est le plan parallèle à $\mathcal{P}$ qui passe par l'origine.

I.2.6 Paramétrisation

On déduit immédiatement une forme paramétrée pour notre plan $\mathcal{P}$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A + t\vec{u}_1 + s\vec{u}_2, s, t \in \mathbb{R}$$

I.2.7 La constante d

On vient de voir que $\vec{n}$ et $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ sont imposés par a, b, c , les coefficients de x, y et z dans l'équation. Ces trois vecteurs définissent la direction $\text{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = (\text{Vect}(\vec{n}))^\perp$.

$$\text{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2) : ax + by + cz = 0$$

Si $\mathcal{P}$ n'est pas un plan vectoriel (i.e. ne passe pas par l'origine), la constante d est déterminée par un point de $\mathcal{P}$ qui doit vérifier l'équation.

I.2.8 Méthodes

1. Pour exploiter une équation donnée : trouver un vecteur normal en lisant l'équation, puis deviner les coordonnées d'un ou de plusieurs point(s) suivant les besoins de l'énoncé.
Pour trouver une base, on résout l'équation de $\mathcal{P}$ (l'équation homogène suffit, voir plus haut, ou l'équation complète, voir plus bas).
2. Pour établir une équation, la méthode varie suivant les données de l'énoncé.
 - (a) Si on donne un point et un vecteur normal, alors les constantes a, b, c sont déterminées par le vecteur et on calcule d pour que le plan passe bien par le point donné.

(b) Si le plan est donné par un point A et une base $\vec{u}_1, \vec{u}_2$, deux méthodes sont envisageables :

— calculer un vecteur normal $\vec{n} = \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2$ et revenir au cas précédent.

— Expliciter $M = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{P}$ ssi $\det_{\mathcal{B}_c}(\overrightarrow{AM}, \vec{u}_1, \vec{u}_2) = 0$.

Les calculs sont identiques.

(c) Si le plan est donné par trois points A, B, C non alignés, on connaît en fait une base $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ et on revient au point précédent.

(d) Dans les autres cas, la direction est donnée par une condition de parallélisme ou d'orthogonalité (le plus souvent) ce qui définit soit une base, soit un vecteur normal.

Exercices d'entraînement

1. Soient $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ et $M_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ x_0^2 - y_0^2 \end{pmatrix}$ et $\vec{n}_0 = \begin{pmatrix} 2x_0 \\ -2y_0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(a) Donner une équation du plan $\mathcal{P}_0$ passant par M_0 et normal à $\vec{n}_0$.

(b) À quelle condition $\mathcal{P}_0$ est-il horizontal ?

(c) On considère $f(x, y) \mapsto x^2 - y^2$. Exprimer M_0 et $\vec{n}_0$ grâce à f .

2. Montrer que $\mathcal{P}_1 : x + 2y - z = 1$ et $\mathcal{P}_2 : 2x - z = 3$ ne sont pas parallèle (n'ont pas la même direction) et donner un point et un vecteur directeur de la droite $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$.

3. On considère la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u+v \\ u-v \\ uv \end{pmatrix} \end{cases}$

(a) Justifier que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et calculer ses dérivées partielles

(b) Fixons $u_0, v_0 \in \mathbb{R}$. $\frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0)$ et $\frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0)$ sont-ils colinéaires ?

(c) Dans le cas où les deux vecteurs précédents ne sont pas colinéaires, donner une équation de $\mathcal{P}_0$ dont ils forment une base et qui passe par $M_0 = f(u_0, v_0)$.

II Systèmes linéaires

II.1 Généralités

II.1.1 Forme d'un système linéaire, solutions

Un système linéaire à n équations et p inconnues et à coefficients dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est un ensemble d'équation de la forme

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,p}x_p &= b_1 \\ \vdots &= \vdots \\ a_{n,1}x_1 + \cdots + a_{n,p}x_p &= b_n \end{cases}$$

où $(x_i)_{i \in [1,p]}$ est la famille des inconnues et les $a_{i,j}$ sont des éléments de $\mathbb{K}$ et les b_i aussi.

Le vecteur $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$ est le vecteur second membre. La matrice $A = (a_{i,j})_{\substack{i \in [1,n] \\ j \in [1,p]}}$ est la matrice de ce système et

si on note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ la colonne inconnue, alors ce système s'écrit

$$AX = B$$

Une solution de ce système est un vecteur $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^p$ tels que les n équations soient simultanément vraies.

L'ensemble des solutions de ce système est un sous-ensemble de $\mathbb{K}^p$.



Un système d'équations est linéaires lorsque le membre de gauche (qui regroupe les inconnues) est uniquement composé de combinaisons linéaires des inconnues.
Les coefficients ne dépendent pas des inconnues : on ne permet que des multiplications par des "constants" et des sommes. Pas de produit entre inconnues, ni de fonction plus compliquée (exp, ln, sin... d'une inconnue)

II.1.2 Systèmes homogènes

Il s'agit du cas classique où le second membre est la colonne nulle. Le système s'écrit alors

$$AX = 0_{\mathbb{K}^p}$$

L'ensemble des solutions est alors $\ker(A)$.

II.1.3 Matrice échelonnée

Soit A une matrice.

1. On dit que A est échelonnée par ligne si :

- quand une ligne est nulle, toutes les suivantes le sont aussi,
- le premier coefficient non nul de chaque ligne (appelé pivot) est strictement à droite de celui de la ligne précédente.

La matrice à une forme en escalier inversé : dans la colonne du premier coefficient non nul d'une ligne, il n'y a que des 0 en dessous.

II.1.4 Résolution d'un système homogène

Il se fait en trois étapes :

1. Échelonner la matrice A (quitte à échanger des lignes pour faciliter le calcul), ce qui échelonne le système.
2. Les paramètres sont toutes les inconnues qui ne sont pas en facteur des pivots.
3. Passer uniquement les paramètres dans le membre de droite et exprimer toutes les inconnues en fonction des paramètres.

L'ensemble des solutions est de la forme $\text{Vect}(C_1, \dots, C_s)$ où les colonnes C_i sont obtenues comme facteurs des paramètres.

D'après le théorème du rang, $s = p - \text{rg}(A)$ (le nombre d'inconnues - le rang).

II.1.5 Exercice

Dans $\mathbb{R}^4$, on considère $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $F = \text{Vect}(u, v)$.

Déterminer une base de $F^\perp$ (rappel : $X \perp F$ ssi $X \perp u$ et $X \perp v$).

II.1.6 Résolution d'un système avec second membre

Pour résoudre $AX = B$ où B est une colonne non nulle, on procède comme précédemment, MAIS :

- il faut répercuter les opérations sur le second membre
- il se peut qu'une des lignes nulle de la matrice (après opération) se retrouve face à une constante non nulle dans le second membre et on se retrouve avec une équation de la forme

$$0 = c \text{ où } c \in \mathbb{K}^*$$

Dans ce cas, le système n'a pas de solution et il est dit **incompatible**.

Dans le cas où le système est compatible, l'ensemble des solutions est de la forme $X_0 + \text{Vect}(C_1, \dots, C_s)$:

- X_0 est une colonne de constantes, qui est une solution particulière du système.
- $C_1, \dots, C_s$ sont les facteurs des paramètres et il s'agit également de $\ker(A)$

on le voit en notant que $AX = B \iff AX = AX_0 \iff A(X - X_0) = 0 \iff X - X_0 \in \ker(A)$

II.1.7 Système de Cramer

Lorsque $n = p$ (autant de ligne que d'équation), le système est dit de Cramer ssi $A \in GL_n(\mathbb{K})$. Remarquons qu'alors

$$AX = B \iff X = A^{-1}B$$

D'après les remarques précédentes, un système carré possède une unique solution ssi $\ker(A) = \{0\}$: si le système possède une unique solution, sa matrice carrée est inversible.

II.1.8 Méthode d'inversion d'une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont on veut trouver l'inverse s'il existe.

On pose $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $B = (\alpha_1 \dots \alpha_n)$ (une colonne second membre générale, sans fixer les valeurs des α_i).

On résout $AX = B$ par la méthode précédente. Si le système est compatible et qu'il possède une unique solution (ce qui sera automatique s'il est compatible) alors on a

$$X = A^{-1}B$$

et on peut lire les coefficients de A^{-1} comme facteurs des α_i dans la solution X .

II.2 Géométrie

II.2.1 Trouver une base et un point

Traitons deux exemples en guise de rappels.

1. On considère la droite $\mathcal{D} : x - 2y + 4 = 0$. Trouvons un point et un vecteur directeur.

On a $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{D} \iff x - 2y = -4$ (système à 2 inconnues et 1 équation) Ainsi $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{D} \iff \begin{cases} x = -4 + 2y \\ y = y \end{cases} \iff$
 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ainsi $\mathcal{D} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ passe par $A = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ et est dirigée par $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. Trouver un point et une base du plan $\mathcal{P} : x + y - z - 2 = 0$.

On procède exactement de la même manière, en remarquant que $\mathcal{P}$ est l'ensemble des solutions d'un système à 1 équation et 3 inconnues.

On trouve $\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

II.2.2 Intersections

Pour trouver l'intersection de plusieurs objets géométriques définis par des équations, on peut résoudre le système d'équations composé de leurs équations.

Lorsqu'il s'agit de droites ou de plans (ou d'hyperplans, voir le cours correspondant) on peut appliquer les résultats sur les systèmes pour trouver un point et une base.



Rappelons que les sous-espaces vectoriels passent toujours par le vecteur nul et donc un point est sous-entendu.

Exercices de révision

Vous pouvez aller consulter la page <https://prepa.blaise-pascal.fr/16-17/ptsi/math/td/> (remarquer l'année, aller consulter la section TD de math) pour trouver des feuilles de TD.