Devoir maison n°11

À rendre le 06/02

Exercice 1
On considère la conique $\mathcal{C}$ dont l'équation dans le repère canonique $\mathcal{R} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est

$$\mathcal{C} : x^2 - \frac{1}{4}y^2 + 2x + y = 2$$

On pose également $f : (x, y) \mapsto x^2 - \frac{1}{4}y^2 + 2x + y - 2$ définie sur $\mathbb{R}^2$.

1. Trouver le point Ω tel que, dans $\mathcal{R}' = (\Omega, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, l'équation de $\mathcal{C}$ soit réduite et donner cette équation réduite.

   Correction Pour $x, y \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned} x^2 - \frac{1}{4}y^2 + 2x + y &= (x^2+2x) - \frac{1}{4}(y^2 - 4y) = (x+1)^2 - 1 - \frac{1}{4}\left((y-2)^2 - 4\right) \\ &= (x+1)^2 - \frac{(y-2)^2}{4} - 2 \end{aligned}$$

   Ainsi, en notant x', y' les coordonnées dans $\mathcal{R}'$, on veut $\begin{cases} x' = x+1 \\ y' = y-2 \end{cases}$ Il s'agit d'un changement par translation et le centre du nouveau repère vérifie $x' = 0$ et $y' = 0$ donc Ω est de coordonnées $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{R}$.
   Alors $\mathcal{C} : \frac{(x')^2}{4} - \frac{(y')^2}{8} = 1$ et il s'agit d'une hyperbole.

2. Tracer $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{R}$ en faisant figurer le repère $\mathcal{R}'$.
3. Donner tous les points critiques de f. Que remarquez-vous ?

   Correction Le seul point critique est en Ω.

4. ($\star$) On pose maintenant $g : (u, v) \mapsto \frac{u^2}{4} - \frac{v^2}{16} - 1$. Quel est le seul point critique de g ? Quelle interprétation géométrique peut-on en faire ?

   Correction Le seul point critique est en O. et il s'agit encore du centre de la conique.

Exercice 2
On considère maintenant $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$ et la fonction

$$f \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey \end{array} \right.$$

1. Montrer que f possède un unique point critique ssi $b^2 - 4ac \neq 0$.
   Dans la suite on considère que cette condition est vérifiée.

   Correction f est polynomiale donc $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et

$$\overrightarrow{grad}\, f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2ax + by + d \\ bx + 2cy + d \end{pmatrix}$$

   On pose $A = \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}$ la matrice de la partie quadratique de f et alors

$$\overrightarrow{grad}\, f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff 2A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d \\ -e \end{pmatrix}$$

   Ce système linéaire possède une unique solution ssi $2A$ est inversible ssi $\det(2A) \neq 0$ ssi $4ac - b^2 \neq 0$.

2. Montrer que H, la matrice hessienne de f, ne dépend pas du point où on la calcule et traduire la condition précédente sur H.

   Correction f est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ comme à la question précédente et $H = 2A$ ne dépend pas de x, y.
   f possède un unique point critique ssi $\det(H) \neq 0$.

3. ($\star$) Soit $P = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in O_2(\mathbb{R})$. On pose maintenant

$$g : \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto f\begin{pmatrix} \alpha u + \beta v \\ \gamma u + \delta v \end{pmatrix} = f(P\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix})$$

   On note $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ l'unique point critique de f.
   Montrer que g possède un unique point critique que l'on exprimera en fonction de P et X_0.

   Correction g est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ par composition et, pour $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$$\overrightarrow{grad}\, g \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \frac{\partial f}{\partial x}(P\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}) + \gamma \frac{\partial f}{\partial y}(P\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}) \\ \beta \frac{\partial f}{\partial x}(P\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}) + \delta \frac{\partial f}{\partial y}(P\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}) \end{pmatrix} = P^T\, \overrightarrow{grad}\, f(P\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix})$$

   Comme P^T est inversible, $\overrightarrow{grad}\, g \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0 \iff \overrightarrow{grad}\, f(P)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}) = 0$ et donc l'unique point critique de g est en $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ = \end{pmatrix} P^{-1}X_0$.
   Ainsi, en considérant le changement de base représenté par P, le point critique de g est au même endroit du plan que le point critique de f : ses coordonnées dans la nouvelle base s'obtiennent par la formule de changement de coordonnées. $X = PX'$ et $X' = P^{-1}X$

4. ($\star$) Montrer que si l'on effectue un changement de repère par translation, la fonction h obtenue possède un unique point critique que l'on exprimera en fonction de X_0.

   Correction Cette fois on pose $h : \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto f(\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix})$ et on trouve que l'unique point critique de h est en $X_0 - \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$.
   Encore une fois, le point critique n'a pas bougé.

5. On considère la conique $Co : f(x, y) = k$ où $k \in \mathbb{R}$ est tel que $\mathcal{C}$ n'est pas dégénérée (c'est une vraie conique et par un unique point, ni une réunion de droite, ...)
   Montrer que f est soit une ellipse, soit une hyperbole et que son centre est en X_0.

   Correction Avec la matrice A de la question 1, on a $\det(A) \neq 0$ donc les valeurs propres de A ne sont pas nulles et donc $\mathcal{C}$ est de type ellipse (deux valeurs propres de même signe) ou hyperbole (des valeurs propres de signes opposés).
   Après un changement de repère par rotation et une translation, l'équation de $\mathcal{C}$ devient réduite et son centre, dans le nouveau repère est en O qui est exactement au point critique de f d'après les questions précédentes.

Indications

Exercice 1

1. Il y a deux mises sous forme canonique à effectuer. Ne pas oublier de factoriser pour celle sur y.
2.
3.

Exercice 1

1. Poser la matrice du système linéaire obtenu.
2. Calculer H en un (x, y).
3. Le gradient de g, noté en colonne, s'exprime en fonction du gradient de f.
4. Poser des notations pour traduire le changement de repère comme un changement de variable sur f.
5. On connaît un renseignement sur $\det(H)$ qui nous donne une indication sur la nature de la conique f.