

I Énoncé du théorème

On considère un intervalle I , trois fonctions continues $a, b, c \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$, $t_0 \in I$ et $v_0, v_1 \in \mathbb{R}$. On souhaite résoudre le problème de Cauchy

$$\begin{aligned} \forall t \in I \quad y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) &= c(t) \\ y(t_0) &= v_0 \\ y'(t_0) &= v_1 \end{aligned}$$

d'inconnue $y \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$

La première étape est de transformer ce problème en un problème d'ordre 1, vectoriel. Pour $y \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$, on pose $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$ (qui est $\mathcal{C}^1$ de I dans $\mathbb{R}^2$) et le problème de Cauchy peut alors s'écrire

$$Y'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a(t) & -b(t) \end{pmatrix} Y(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ c(t) \end{pmatrix} \text{ et } Y(t_0) = \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \end{pmatrix}$$

Théorème 1 (Cauchy-Lipschitz linéaire)

Soit $A : \begin{cases} I & \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ t & \mapsto A(t) \end{cases}$ une fonction continue à valeurs matricielles, $B : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue. On fixe $t_0 \in I$ et $Y_0 \in \mathbb{R}^n$.

Alors le problème de Cauchy

$$\begin{aligned} \forall t \in I \quad Y'(t) &= A(t)Y(t) + B(t) \\ Y(t_0) &= Y_0 \end{aligned}$$

(d'inconnue $Y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$) admet une unique solution.

II Norme d'une matrice

Pour prouver ce théorème, nous avons besoin d'une autre notion de norme pour une matrice M .

Proposition 1

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Notons $S_1 = \{X \in \mathbb{R}^n; \|X\| = 1\}$.

1. L'application $f : \begin{cases} S_1 & \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ X & \mapsto \|MX\| \end{cases}$ possède une valeur maximale que l'on notera $N(M)$.
2. On a $0 \leq N(M) = N(-M)$.
3. Pour $M_1 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $N(M + M_1) \leq N(M) + N(M_1)$ (inégalité triangulaire).

Preuve.

1. S_1 est un ensemble fermé et borné de $\mathbb{R}^n$. Il reste à montrer que f est une application continue.

L'application linéaire $X \mapsto MX$ est clairement continue sur chaque coordonnée. De plus, $X \mapsto \|X\| =$

$\sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}$ (avec des notations évidentes pour les coordonnées de X) est une application continue sur $\mathbb{R}^n$ par somme et composition.

Finalement, f est continue par composition. Ainsi f possède une valeur maximale (et une valeur minimale évidente qui est 0).

2. Évident d'après la définition de $N(M)$.

3. $M + M_1 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et la preuve précédente montre qu'on peut poser X_0 tel que $N(M + M_1) = \|(M + M_1)X_0\|$ (un maximum est atteint en au moins un point).

Alors $N(M + M_1) \leq \|MX_0\| + \|M_1X_0\|$ par inégalité triangulaire. De plus, par définition (en tant que maximum) de $N(M)$ on a $\|MX_0\| \leq N(M)$ et de même $\|M_1X_0\| \leq N(M_1)$.

On a bien

$$N(M + M_1) \leq N(M) + N(M_1) \quad \blacksquare$$

Norme et produit Soit $X \in \mathbb{R}^n$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Si $X = 0$ alors $MX = 0$ et donc $\|MX\| = 0 = N(M)\|X\|$.
- Si $X \neq 0$, on pose $X_1 = \frac{1}{\|X\|}X \in S_1$ et alors, par définition de $N(M)$, $\|MX_1\| \leq N(M)$ ou encore $\frac{1}{\|X\|}\|MX\| \leq N(M)$. Ainsi

$$\|MX\| \leq N(M)\|X\|$$

Cette dernière relation est également valable pour $X = 0$.

Proposition 2

En utilisant les notations de la proposition 1 on a

1. $N(M) \xrightarrow{M \rightarrow 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}} 0_{\mathbb{R}}$.
2. L'application $N : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ M & \mapsto N(M) \end{cases}$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Preuve.

La preuve de cette proposition peut être omise en première lecture.

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Notons $L_1, \dots, L_n$ les lignes de M ; Soit $X \in \mathbb{R}^n$. On a, par définition du produit matriciel

$$MX = \begin{pmatrix} L_1 X \\ \vdots \\ L_n X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle L_1^T, X \rangle \\ \vdots \\ \langle L_n^T, X \rangle \end{pmatrix}$$

où on utilise le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$.

Ainsi $\|MX\|^2 = \sum_{i=1}^n \langle L_i^T, X \rangle^2 \leq \sum_{i=1}^n \|L_i^T\|^2 \|X\|^2$ d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz et par somme d'inégalités. En factorisant par $\|X\|^2$ et en notant $M = (m_{i,j})_{i,j \in \llbracket 1, n \rrbracket}$, on a

$$\|MX\|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{i,j}^2 \right) \|X\|^2$$

car chaque coefficient apparaît exactement une fois dans les $\|L_i\|^2$.

On en déduit que si $X \in S_1$, alors $\|MX\| \leq \|M\|$ où on utilise la norme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associée au produit scalaire canonique ($\|M\|^2 = \text{tr}(M^T M)$, qui est la somme des carrés des coefficients de M).

Par définition de $N(M)$ (qui est un maximum donc également une borne supérieure, c'est à dire le plus petit de tous les majorant), on a donc $0 \leq N(M) \leq \|M\|$.

Or $\|M\|^2 \xrightarrow{M \rightarrow 0} 0$ (une matrice tend vers 0 ssi tous ses coefficients le font) et par encadrement

$$N(M) \xrightarrow{M \rightarrow 0} 0$$

2. On doit démontrer que pour $M_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ fixée, on a $N(M) \xrightarrow{M \rightarrow M_0} N(M_0)$.

D'après la conséquence classique de l'inégalité triangulaire, on a $0 \leq |N(M) - N(M_0)| \leq N(M - M_0)$ pour toute matrice M .

On applique l'inégalité triangulaire à $(M - M_0) + M_0$ puis à $(M_0 - M) + M$ pour obtenir $N(M) - N(M_0) \leq N(M - M_0)$ et $N(M_0) - N(M) \leq N(M_0 - M) = N(M - M_0)$.

Ainsi, par encadrement,

$$N(M) \xrightarrow{M \rightarrow M_0} N(M_0)$$

car $M - M_0 \xrightarrow{M \rightarrow M_0} 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ et d'après le point précédent. ■

III Construction d'une solution du problème de Cauchy

Transformation de l'équation différentielle. Imaginons un instant que Y vérifie l'équation différentielle du théorème 1.

Alors

$$\forall t \in I \quad Y(t) = Y(t_0) + \int_{t_0}^t (A(s)Y(s) + B(s))ds \quad (1)$$

L'intégrale considérée est ici une intégrale d'une fonction vectorielle, qui se calcule coefficient par coefficient.

Réciproquement, une fonction $Y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$ qui vérifie (1) est une solution de notre problème de Cauchy.

Idée fondamentale : pour les suites numériques vérifiant une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ on prouve usuellement (sous de bonnes hypothèses) que (u_n) converge vers un ℓ tel que $\ell = f(\ell)$.

Construction d'un candidat on considère que Y_0 est une fonction constante et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on définit la fonction $Y_{n+1} \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$ par

$$\forall t \in I \quad Y_{n+1}(t) = Y_0 + \int_{t_0}^t (A(s)Y_n(s) + B(s))ds$$

On a donc $Y'_{n+1}(t) = A(t)Y_n(t) + B(t)$.

Inégalité triangulaire intégrale et norme. Pour $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue, montrons que $\left\| \int_a^b f(t)dt \right\| \leq$

$\int_a^b \|f(t)\|dt$. On utilise ici la norme classique (associée au produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$).

Posons $v = \int_a^b f(t)dt \in \mathbb{R}^n$. Alors

$$\left\| \int_a^b f(t)dt \right\|^2 = \left\langle v, \int_a^b f(t)dt \right\rangle = \int_a^b \langle v, f(t) \rangle dt$$

par linéarité de l'intégrale (pour le voir, poser les fonctions coordonnées de f et exprimer l'intégrale)

Or, pour $t \in [a, b]$, $\langle v, f(t) \rangle \leq \|v\| \|f(t)\|$ d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Ainsi on obtient

$$\|v\|^2 = \left\| \int_a^b f(t)dt \right\|^2 \leq \|v\| \int_a^b \|f(t)\|dt$$

par linéarité de l'intégrale.

Que v soit le vecteur nul ou non, on obtient bien $\|v\| = \left\| \int_a^b f(t)dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\|dt$

Proposition 3

On utilise les notations définissant la suite (Y_n) .

Soit $J = [a, b] \subset I$ un segment contenant t_0 .

1. Il existe deux constantes M_J, C_J (qui dépendent du choix de J) telles que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t \in J \quad \|Y_{n+1}(t) - Y_n(t)\| \leq C_J \frac{M_J^n (b-a)^n}{n!}$$

2. Pour $t \in J$, la suite de vecteurs $(Y_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un vecteur noté $Y(t)$.
3. La fonction $t \mapsto Y(t)$ définie sur J est une fonction continue.

Preuve.

1. Remarquons d'abord que $\varphi : s \mapsto N(A(s))$ est une fonction continue sur J par composition, car N est continue et A est supposée continue. De plus, J est fermé borné donc φ possède un maximum noté M_J . De même, $s \mapsto \|Y_1(s) - Y_0(s)\|$ est une fonction continue sur $J = [a, b]$ par composition et donc possède un maximum noté C_J .

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t \in J \quad \|Y_{n+1}(t) - Y_n(t)\| \leq C_J \frac{M_J^n |t-t_0|^n}{n!}$.

— Le cas $n = 0$ est seulement la définition de C_J .

— Supposons la propriété vraie pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé. Soit $t \in J$. On traite pour commencer le cas $t > t_0$ (pour s'assurer qu'on intègre bien sur un segment, ie "de gauche à droite").

On a $\|Y_{n+2}(t) - Y_{n+1}(t)\| \leq \int_{t_0}^t \|A(s)(Y_{n+1}(s) - Y_n(s))\|ds$.

Or, pour $s \in [t_0, t]$, $\|A(s)(Y_{n+1}(s) - Y_n(s))\| \leq N(A(s))\|Y_{n+1}(s) - Y_n(s)\|$ (voir la remarque suivant la proposition 1). Par produit de nombres positifs, $\|A(s)(Y_{n+1}(s) - Y_n(s))\| \leq M_J \|Y_{n+1}(s) - Y_n(s)\|$. On peut utiliser maintenant l'hypothèse de récurrence pour obtenir, par croissance de l'intégrale

$$\|Y_{n+2}(t) - Y_{n+1}(t)\| \leq M_J \int_{t_0}^t C_J \frac{M_J^n (s-t_0)^n}{n!} ds = C_J M_J^{n+1} \left[\frac{(s-t_0)^{n+1}}{(n+1)!} \right]_{t_0}^t$$

le cas $t < t_0$ se traite de manière similaire, mais $\int_{t_0}^t \dots = - \int_t^{t_0} \dots$

— Par récurrence, la propriété à prouver est vraie.

Comme, pour tout $t \in J$, $t, t_0 \in J$ on a $|t - t_0| \leq b - a$ et par croissance de la fonction puissance n , $|t - t_0|^n \leq (b - a)^n$. Ce qui prouve le premier point

2. Remarquons pour poursuivre (et dans l'esprit du cours sur les séries), on a $Y_n(t) - Y_0(t) = \sum_{k=0}^{n-1} (Y_{k+1}(t) - Y_k(t))$.

Chaque coordonnée de $Y_n(t) - Y_0(t)$ est donc une somme partielle dont le terme général est majoré

en valeur absolue par $C_J \frac{M_J^n (b-a)^n}{n!}$ (Pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, on a $|x_k| \leq \|X\|$ immédiatement). De plus,

$\sum_{n \geq 0} C_J \frac{M_J^n (b-a)^n}{n!}$ est une série convergente (vers $C_J \exp(M_J(b-a))$).

Ainsi $(Y_n(t) - Y_0(t))_n$ est une suite convergente (toutes ses coordonnées sont des séries convergentes) et on a bien $(Y_n(t))$ converge vers un certain vecteur $Y(t)$, et ce pour chaque $t \in J$.

3. Fixons $t_1 \in J$, montrons que $Y(t) \xrightarrow{t \rightarrow t_1} Y(t_1)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} \|Y(t_1) - Y(t)\| &= \|Y(t_1) - Y_n(t_1) + Y_n(t_1) - (Y(t) - Y_n(t)) - Y_n(t)\| \\ &\leq \|Y(t_1) - Y_n(t_1)\| + \|Y_n(t_1) - Y_n(t)\| + \|Y(t) - Y_n(t)\| \end{aligned}$$

Soit maintenant $m > n$ et $s \in J$. On a

$$\|Y_m(s) - Y_n(s)\| = \left\| \sum_{k=n}^{m-1} (Y_{k+1}(s) - Y_k(s)) \right\| \leq \sum_{k=n}^{m-1} C_J \frac{M_J^k (b-a)^k}{k!}$$

par inégalité triangulaire et d'après le point 1.

La somme qui apparaît est une somme partielle du reste de rang $n-1$ d'une série convergente et donc la limite quand $m \rightarrow +\infty$ existe et est finie. De même $Y_m(s) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} Y(s)$ d'après le point 2 et donc on peut faire tendre $m \rightarrow +\infty$ et utiliser le passage à la limite des inégalités larges (qui, rappelons le, ne prouve pas l'existence de limite mais suppose d'abord que la limite existe).

$$\|Y(s) - Y_n(s)\| \leq \sum_{k=n}^{+\infty} C_J \frac{M_J^k (b-a)^k}{k!} = R_n(J)$$

par continuité de la norme.

On remarque que $R_n(J)$ ne dépend pas de s et on a $R_n(J) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ (en tant que reste d'une série convergente).

On reprend l'inégalité de départ

$$\|Y(t_1) - Y(t)\| \leq 2R_n(J) + \|Y_n(t_1) - Y_n(t)\|$$

Fixons maintenant $\varepsilon > 0$. On prend un n suffisamment grand pour que $2R_n(J) \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Comme Y_n est continue en t_1 (c'est une fonction $\mathcal{C}^1$ sur J), on peut choisir $\delta > 0$ tel que

$$\forall t \in J \cap [t_1 - \delta, t_1 + \delta] \quad \|Y_n(t_1) - Y_n(t)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Alors $\forall t \in J \cap [t_1 - \delta, t_1 + \delta] \quad \|Y(t_1) - Y(t)\| \leq \varepsilon$. C'est la définition de $Y(t) \xrightarrow{t \rightarrow t_1} Y(t_1)$. ■

Extension à I . Tout $t \in I$ peut être vu comme un élément d'un segment $J = [a, b]$ contenant t_0 (et on peut même choisir J de telle sorte que t soit à l'intérieur de J sauf si t est une borne de I).

La construction précédente définie en fait Y sur I en entier, et cette fonction est continue sur I en entier (la preuve de continuité n'est valable qu'en a^+ et b^- dans la proposition précédente, mais c'est suffisant si on peut mettre t à l'intérieur de J et de même si t est en fait une borne fermée de I).

Proposition 4

La fonction Y construite à la proposition précédente vérifie :

$$\forall t \in I \quad Y(t) = Y_0 + \int_{t_0}^t (A(s)Y(s) + B(s))ds$$

et donc Y est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et est une solution de notre problème de Cauchy.

Preuve.

Encore une fois, on pose $n \in \mathbb{N}$.

Soit $t \in I$. On choisit comme segment $J = [t, t_0]$ ou $[t_0, t]$ suivant que $t < t_0$ ou $t > t_0$ (l'égalité est facilement vérifiée en $t = t_0$ car $Y_n(t_0) = Y_0$ est une suite constante qui converge vers $Y_0 = Y(t_0)$).

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On a

$$\|Y(t) - Y_0 - \int_{t_0}^t (A(s)Y(s) + B(s))ds - Y_n(t) + Y_n(t)\| \leq \|Y(t) - Y_n(t)\| + \left\| \int_{t_0}^t A(s)(Y(s) - Y_{n-1}(s))ds \right\|$$

(par définition de $Y_n - Y_0$). On a déjà $\|Y(t) - Y_n(t)\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

De plus, pour s entre t et t_0 ,

$$\|A(s)(Y(s) - Y_{n-1}(s))\| \leq N(A(s))\|Y(s) - Y_{n-1}(s)\| \leq M_J\|Y(s) - Y_{n-1}(s)\| \leq M_J R_{n-1}(J)$$

avec les notations de la preuve précédente.

Ainsi, par inégalité triangulaire intégrale et croissance de l'intégrale (on passe en valeur absolue pour traiter les deux cas de forme d'intervalle) on a

$$\left\| \int_{t_0}^t A(s)(Y(s) - Y_{n-1}(s))ds \right\| \leq \underbrace{M_J R_{n-1}(J)}_{\geq 0} \left| \int_{t_0}^t 1ds \right| = M_J R_{n-1}(J)|t - t_0|$$

Comme $R_{n-1}(J) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, par somme de limites nulles et par encadrement

$$\|Y(t) - Y_0 - \int_{t_0}^t (A(s)Y(s) + B(s))ds\| = \|Y(t) - Y_0 - \int_{t_0}^t (A(s)Y(s) + B(s))ds - Y_n(t) + Y_n(t)\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Ainsi, $\|Y(t) - Y_0 - \int_{t_0}^t (A(s)Y(s) + B(s))ds\| = 0$.

On a bien Y de classe $\mathcal{C}^1$ par somme (une fonction constante et une primitive de fonction continue par produit) et solution du problème de Cauchy comme déjà remarqué. ■

IV Unicité de la solution

Imaginons qu'il existe deux fonctions $g, h : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que

$$\begin{cases} \forall t \in I \ h'(t) = A(t)h(t) + B(t) \\ h(t_0) = Y_0 \\ \forall t \in I \ g'(t) = A(t)g(t) + B(t) \\ g(t_0) = Y_0 \end{cases}$$

Considérons $J = [a, b]$ un segment inclus dans I qui contienne t_0 . Nous allons montrer que $\forall t \in J \ h(t) = g(t)$.

Soit $t \in J$. On a, en passant l'équation différentielle sous forme intégrale,

$$\|g(t) - h(t)\| = \left\| \int_{t_0}^t A(s)(g(s) - h(s))ds \right\| \leq \left| \int_{t_0}^t \|A(s)(g(s) - h(s))\|ds \right|$$

Or $\|g - h\|$ est une fonction continue (par composition) sur un segment J , elle possède une valeur maximale notée C_J .

Ainsi, pour $s \in [t_0, t]$ (ou $[t, t_0]$) qui est segment inclus dans J , on a

$$\|A(s)(g(s) - h(s))\| \leq N(A(s))\|g(s) - h(s)\| \leq M_J C_J$$

en reprenant la définition de M_J donnée dans la preuve de la proposition 3.

$$\text{Ainsi } \|g(t) - h(t)\| \leq \underbrace{M_J C_J}_{\geq 0} \left| \int_{t_0}^t 1ds \right| = M_J C_J |t - t_0|.$$

Mais on peut maintenant reprendre le raisonnement en remplaçant C_J par le majorant trouvé ici :

$$\|g(t) - h(t)\| \leq \left| \int_{t_0}^t M_J \times M_J C_J |s - t_0|ds \right| = C_J M_J^2 \frac{|t - t_0|^2}{2}$$

(pour le calcul de l'intégrale, on peut par exemple traiter séparément les cas $t > t_0$ et $t < t_0$ pour supprimer les valeurs absolues)

Par une récurrence immédiate,

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \|g(t) - h(t)\| \leq C_J \frac{M_J^n |t - t_0|^n}{n!}$$

Ainsi, par encadrement (on a reconnu un terme général de série convergente, qui tend donc vers 0), $\|g(t) - h(t)\| = 0$ ie $g(t) = h(t)$.

Ainsi g et h coïncident sur J pour tout segment $J \subset I$ (contenant t_0) et donc coïncident sur I en entier. $\square$