Concours blanc : Math 1

Durée : 4H. Calculatrices interdites. **Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction et la propreté : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.**

Lisez l'énoncé attentivement et en entier **AVANT** de commencer chaque exercice.

Exercice 1

Les parties de cet exercice sont presque indépendantes. Tous les résultats du préambule peuvent être réutilisés

Vous pouvez admettre le résultat d'une question afin de l'utiliser dans les questions suivantes.

Première partie, questions préliminaires

Toutes les questions sont indépendantes. Il s'agit ici d'établir quelques résultats utiles dans la suite.

1. Rappeler, en justifiant, le domaine de dérivabilité ainsi que la dérivée de $f : t \mapsto e^{it}$.
2. Soit φ une fonction dérivable sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{C}$. Pour $t \in I$ on note $\varphi(t) = \alpha(t) + i\beta(t)$ la forme algébrique de $\varphi(t)$.
On note également $f : t \mapsto \exp(\varphi(t))$ qui est une fonction définie sur I
 - (a) Pour $t \in I$, donner la forme algébrique de $f(t)$
 - (b) Montrer que f est dérivable sur I et que $f' : t \mapsto \varphi'(t)e^{\varphi(t)}$
3. Rappeler sans justification la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ en fonction du réel α .
4. Pour $a, b \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$, rappeler l'expression de $(a+b)^n$ sous forme d'une somme. Préciser le coefficient de $a^{n-1}b$ et celui de ab^{n-1} (lorsque $n \geq 1$).
5. On fixe $t \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n = e^t$.
6. Démontrer que les solutions de l'équation $Z^n = 1$ d'inconnue $Z \in \mathbb{C}$ et pour $n \in \mathbb{N}$ un entier supérieur ou égal à 2 sont les complexes de la forme $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

Deuxième partie, un produit

Le but de cette partie est d'exprimer $\sin(x)$ sous forme d'un produit.

1. Rappeler le développement en série entière de e^z pour $z \in \mathbb{C}$.
2. Soit $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. Exprimer $\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$ sous forme d'une somme.
3. On note $f_n : z \mapsto e^z - \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$. Montrer que f_n est développable en série entière sous la forme $\sum a_k z^k$ et préciser la valeur de a_k en fonction de k et n .
4. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N} \ a_k \geq 0$.
5. En déduire que $\forall z \in \mathbb{C} \ |f_n(z)| \leq f_n(|z|)$.
6. En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^z$. On pourra également utiliser un résultat du préambule.
7. Pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $x \in \mathbb{R}$, on note maintenant $P_n(x) = \frac{1}{2i} \left(\left(1 + \frac{ix}{2n}\right)^{2n} - \left(1 - \frac{ix}{2n}\right)^{2n} \right)$.
 - (a) Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(x) = \sin(x)$.
 - (b) En appliquant le théorème du binôme de Newton, montrer que P_n est polynomiale de degré $2n-1$, de monôme dominant $\frac{(-1)^{n-1}}{(2n)^{2n-2}} x^{2n-1}$.
 - (c) Que vaut $P_n(0)$? Qu'en déduire pour le coefficient constant?
 - (d) Montrer que les racines de P_n sont les nombres de la forme $\pm 2n \tan\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$ pour $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ et que la dernière racine est 0.
 - (e) En déduire que

$$P_n(x) = \left(\frac{-1}{4n^2}\right)^{n-1} x \prod_{k=1}^{n-1} \left(x^2 - 4n^2 \tan^2 \frac{k\pi}{2n}\right).$$

- (f) En considérant la quantité $\frac{P_n(x)}{x}$ s'il le faut, montrer que

$$\sin(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} x \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{x^2}{4n^2 \tan^2 \frac{k\pi}{2n}}\right)$$

- (g) Pour k fixé, donner un équivalent de $4n^2 \tan^2 \frac{k\pi}{2n}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
 On admet qu'une étude plus fine qu'un équivalent permet alors de prouver que

$$\sin(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} x \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{x^2}{k^2 \pi^2}\right)$$

Troisième partie, un autre produit

1. (a) Soit n un entier naturel non nul et $q \in \mathbb{C}$ tel que $q \neq 1$; Rappeler la valeur de $\sum_{k=0}^{n-1} q^k$ qui est la somme des n premiers termes de la suite géométrique de raison q et de premier terme 1.
 (b) En déduire, pour $t \in]0, 1]$, l'expression de

$$\frac{1 - (1-t)^n}{t}$$

en fonction d'une somme.

- (c) Pour tout entier naturel non nul n , on pose :

$$I_n = \int_0^1 \frac{1 - (1-t)^n}{t} dt$$

Étudier la convergence de l'intégrale I_n .

- (d) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n :

$$I_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

- (e) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

2. Pour tout entier naturel non nul n , on pose :

$$u_n = \int_0^1 \frac{t}{n(n+t)} dt$$

- (a) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n , l'intégrale $u_n = \frac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln(n)$.
 (b) Étudier la convergence de la série de terme général u_n .
 (c) En déduire l'existence de :

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n)\right)$$

3. Pour tout entier naturel non nul n , et tout réel **strictement positif** x , on pose :

$$G_n(x) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt$$

- (a) Montrer que $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$ est une intégrale convergente.
 (b) Calculer $\Gamma(1)$.
 (c) Montrer que $\forall u \in]-1, +\infty[\ln(1+u) \leq u$ et en déduire que

$$\forall t \in [0, n[\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}.$$

On admet que cette majoration indépendante de n et le préliminaire permettent de prouver que

$$\forall x > 0 \Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} G_n(x)$$

4. Calculer $G_n(1)$ puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} G_n(1)$. Avons-nous bien $G_n(1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \Gamma(1)$?

5. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n , et tout réel strictement positif x :

$$G_n(x) = \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$$

(On pourra utiliser des intégrations par parties.)

6. On fixe un réel $x > 0$.

(a) Montrer que $\sum_{k \geq 1} \left(\ln \left(1 + \frac{x}{k} \right) - \frac{x}{k} \right)$ est une série convergente.

(b) Pour N un entier naturel non nul, on pose

$$P_N = \prod_{k=1}^N \left(1 + \frac{x}{k} \right) e^{-\frac{x}{k}}$$

Montrer que $(P_N)_{N \geq 1}$ est une suite convergente.

On note classiquement

$$\prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{x}{k} \right) e^{-\frac{x}{k}} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^N \left(1 + \frac{x}{k} \right) e^{-\frac{x}{k}}$$

(c) Avec la même notation qu'à la question précédente, montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} G_n(x) = \frac{1}{x} e^{-\gamma x} \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{x}{k} \right)^{-1} e^{\frac{x}{k}}$$

On pourra utiliser la question 5

7. Dédurre de la deuxième partie la convergence d'un autre produit infini :

$$\forall x \in]0, 1[\quad \frac{\sin(\pi x)}{\pi} = x \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2} \right)$$

8. En utilisant la question 5, montrer que pour $x \in]0, 1[$ on a

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$$

9. En déduire la valeur de $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.

10. Montrer que $\int_0^{+\infty} \exp(-t^2) dt$ converge puis déduire sa valeur de la question précédente.

Quatrième partie, prolongement de Γ

Rappelons que l'on a

$$\forall x \in]0, +\infty[\quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

Le but de cette partie est d'étendre si possible le domaine de définition de la fonction ainsi définie.

1. On souhaite, pour commencer, étendre le domaine de définition aux nombres complexes convenables.

(a) Pour $a > 0$ et $s = x + iy \in \mathbb{C}$ noté sous forme algébrique, on a par définition $a^s = \exp(s \ln(a)) \in \mathbb{C}$.
Exprimer le module de a^s .

(b) Soit $s = x + iy \in \mathbb{C}$ noté sous forme algébrique. Montrer que $f_s : t \mapsto e^{-t} t^{s-1}$ est **intégrable** sur $]0, +\infty[$ si, et seulement si $\operatorname{Re}(s) = x > 0$.

Ainsi, pour les complexes $s \in \mathbb{C}$ tels que $\operatorname{Re}(s) > 0$, on peut encore poser $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{s-1} dt$

(c) Donner une représentation graphique dans le plan complexe du domaine de définition de la fonction Γ .

2. Dans un second temps, on souhaite étendre la définition de Γ à des complexes où l'expression intégrale n'a plus de sens.

(a) Soit $s \in \mathbb{C}$ fixé. Montrer que $g_s : t \mapsto t^s$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que $g'_s : t \mapsto s t^{s-1}$.

- (b) Soit $s \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}(s) > 0$. Justifier rapidement que $\operatorname{Re}(s+1) > 0$ et montrer que

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$$

en utilisant une intégration par partie soigneuse.

- (c) On définit maintenant Γ de la manière suivante :

$$\Gamma : s \mapsto \begin{cases} \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{s-1} dt & \text{si } \operatorname{Re}(s) > 0 \\ \frac{\Gamma(s+1)}{s} & \text{si } s \in D_1 \end{cases}$$

Préciser le domaine D_1 le plus grand possible qui donne du sens à cette définition. On utilisera une phrase de la forme $s \in D_1$ si et seulement si ...

Illustrer graphiquement le nouveau domaine de définition de Γ .

- (d) Sans intégration par parties, exprimer $\Gamma(s)$ en fonction de $\Gamma(s+2)$ puis en fonction de $\Gamma(s+n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. À quelle condition sur s votre expression est-elle valable ?
- (e) L'expression précédente permet de définir $\Gamma(s)$ pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que $-s \notin \mathbb{N}$, en itérant le raisonnement donnant D_1 .

Pour $s \in \mathbb{C}$ tel que $-s \notin \mathbb{N}$, on note $x = \operatorname{Re}(s)$ et $n = \lfloor x \rfloor$ (la partie entière). Donner la valeur de $\Gamma(s)$ en fonction d'une intégrale et éventuellement d'un produit faisant intervenir n .