Sous-espaces

Exercice 1
Déterminer si les ensembles suivants sont des $\mathbb{R}$-ev :

1. *Soit* $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $F = \ker(A) = \{X \in \mathbb{R}^k \mid AX = 0\}$ *en précisant la valeur de* k.
2. *L'ensemble des fonctions* 7*-périodiques de* $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. *Donner un exemple d'un telle fonction (non constante).*
3. $\{P \in \mathbb{C}[X] \mid P(0) = 1\}$.
4. $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + z = 0 \text{ et } 2x + y + z = 0\}$. *Donner une base de cet espace.*

Exercice 2
Montrer que $F = \{P \in \mathbb{C}_3[X] \mid P'(1) = 0\}$ *est un* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel et en donner une base.*

Familles génératrices, libres

Exercice 3

1. *Montrer que* $\mathbb{K}_1[X] = \mathrm{Vect}(X-1, X+1)$.
2. *Montrer que* $\mathbb{R}^2 = \mathrm{Vect}((-1,1),(1,1))$.
3. *Donner une base du sev de* $\mathbb{R}^4$: $\begin{cases} 2x + z - t = 0 \\ x + y - z + t = 0 \end{cases}$
4. *Donner une équation cartésienne de* $\mathrm{Vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})$, *c'est à dire une CNS pour que* $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ *soit dans ce sev.*

Exercice 4
Montrer que $1, \cos, \sin$ *est une famille libre de* $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. *Est-ce que* $id_{\mathbb{R}} \in \mathrm{Vect}(1, \cos, \sin)$ *?*

Exercice 5
Donner la dimension et une base de $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ *l'ensemble des matrice carrée de taille* n *symétriques.*
Même question pour l'ensemble des matrices antisymétriques.

Somme, supplémentaires

Exercice 6
On se place dans $E = \mathbb{R}^4$ *et on pose* $u_1 = (1,2,0,1), u_2 = (2,1,3,1), u_3 = (2,4,0,2), v_1 = (1,2,1,0), v_2 = (-1,1,1,1), v_3 = (2,-1,0,1)$.

1. *Déterminer* $\mathrm{rg}(u_1,u_2,u_3), \mathrm{rg}(v_1,v_2,v_3)$ *ainsi que des base de* $F = \mathrm{Vect}(u_1,u_2,u_3)$ *et* $G = \mathrm{Vect}(v_1,v_2,v_3)$.
2. *Déterminer les dimensions ainsi que des bases de* $F \cap G$ *et* $F + G$.

Exercice 7

1. *Montrer que* $\mathbb{C} = \mathrm{Vect}(1) \oplus \mathrm{Vect}(i)$, $\mathbb{C} = \mathrm{Vect}(1) \oplus \mathrm{Vect}(e + \pi i)$ *(somme de* $\mathbb{R}$*-ev).*
2. *Soient* $F = \mathrm{Vect}((1,2,3),(2,1,3))$ *et* $G = \mathrm{Vect}(3,2,1)$. *Montrer que* $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.
3. *Soient* $F = \{P \in \mathbb{K}_n[X] \mid P(0) = 0\}$ *et* $G = \{P \in \mathbb{K}_n[X] \mid \deg P \leqslant 0\}$. *Montrer que ces ensembles sont des* $\mathbb{K}$*-ev et qu'ils sont supplémentaires dans* $\mathbb{K}[X]$.

Coordonnées, changement de base

Exercice 8
On considère la famille $(P_1,P_2,P_3) = (X^2+X+1, X^2-X+1, X^2-X-1)$. *Donner sa matrice dans la base canonique de* $\mathbb{K}_2[X]$. *Montrer ensuite que c'est une base puis donner les coordonnées de* $X^2 + 3X - 7$ *dans cette base.*

Exercice 9
On note $\mathcal{B}_{can}$ *la base canonique de* $\mathbb{R}^3$. *Montrer que* $\mathcal{B} = (\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}) = (u,v,w)$ *est une base. On note* $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ *les coordonnées dans* $\mathcal{B}_{can}$ *et* $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ *ses coordonnées dans* $\mathcal{B}$. *Donner le lien entre* X *et* X'

Exercice 10
Considérons $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ *la matrice d'une famille* (u,v) *dans la base* $\mathcal{B} = (\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix})$.

Donner la matrice de (u,v) *dans la base canonique de* $\mathbb{R}^2$.

Reprendre l'exercice en considérant que A *est la matrice d'une famille* (P,Q) *dans* $\mathcal{B} : (2X-3, X+1)$ *qui est une base de* $\mathbb{R}_1[X]$.

Exercices théoriques

Exercice 11
Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension $n \geqslant 2$. Soient H, H' deux hyperplans distincts de E. Calculer $\dim(H \cap H')$

Exercice 12
Soient $A, B \in M_n(\mathbb{K})$. On note F le sous espace de $\mathbb{K}^n$ engendré par les colonnes de A.

1. *Montrer que les colonnes de AB sont dans F.*
2. *Montrer que* $\mathrm{rg}(AB) \leqslant \mathrm{rg}(A)$ *et* $\mathrm{rg}(AB) \leqslant \mathrm{rg}(B)$.
3. *Question subsidiaire. A quelle condition suffisante (mais non nécessaire) à-t-on* $\mathrm{rg}(AB) = \mathrm{rg}(A)$ *?*

Exercice 13
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Donner un entier d tel que $(I_n, M, M^2, \ldots, M^d)$ est liée.

Notons $\sum_{k=0}^{d} \lambda_k M^k = 0$ une relation linéaire non triviale et supposons en plus que $\lambda_0 \in 0_{\mathbb{K}}$. Montrer que M est inversible.