Exercice 1 (Révisions sur les EDL1)

1. Résoudre, sur un intervalle que vous préciserez, les équations différentielles :
   (a) $y' - 3y = 0$
   (b) $y'(t) - ty(t) = 0$
   (c) $xy'(x) + y(x) = 0$
   (d) $y'(t) - \frac{1}{3t}y(t) = 0$
   (e) $\frac{y'(x)}{y(x)} + \ln(y(x)) = 0$

> **Correction** :
>
> (a) Sur $I = \mathbb{R}$, les solutions sont de la forme $y : t \mapsto Ke^{3t}$ où K est un réel quelconque.
> (b) $I = \mathbb{R}$, $y : t \mapsto Ke^{\frac{t^2}{2}}$
> (c) $I =]0, +\infty[$, $y : x \mapsto \frac{K}{x}$ et sur $I =]-\infty, 0[$, $y : x \mapsto \frac{K_2}{x}$.
> (d) $I =]0, +\infty[$, $y : t \mapsto Kt^{\frac{1}{3}}$
> (e) Si y est solution alors $y > 0$ et on peut poser $f = \ln(f)$. L'équation devient $f' + f = 0$ et donc $f : x \mapsto Ke^{-x}$ où $K \in \mathbb{R}$ est quelconque et f est définie sur $\mathbb{R}$ donc y aussi.
> Réciproquement, si $K \in \mathbb{R}$ alors $y : x \mapsto e^{Ke^{-x}}$ est solution sur $\mathbb{R}$

2. Même question
   (a) $y'(x) - xy(x) = x$
   (b) $(1 + t)y'(t) - y(t) = 1$

> **Correction** :
>
> (a) Une solution particulière évidente est $y : x \mapsto -1$. (Par variations de la constante, $\lambda'(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$ qui est la dérivée de $x \mapsto -e^{\frac{x^2}{2}}$).
> (b) Sur $]-1, +\infty[$, la variation de la constante donne $\lambda'(t) = \frac{1}{(1+t)^2} = (-\frac{1}{1+t})'$. On retrouve une SP évidente.

3. Donner la seule fonction, définie sur un intervalle à préciser, solution des problèmes de Cauchy suivants :
   (a) $ty'(t) - y(t) = t^2$ et $y(1) = 0$

> **Correction** :
> $t \mapsto t^2 - t$ sur $]0, +\infty[$

   (b) $y'(t) - \ln(t)y(t) = t^{t+1}$ et $y(1) = 2$.

> **Correction** :
> Sur $]0, +\infty[$, $t^{t+1} = te^{t\ln(t)}$.
> Les solutions sont de la forme $t \mapsto Ke^{t\ln(t)-t} + (t-1)e^{t\ln(t)}$ ($\lambda'(t) = te^t$ dans la variation de la constante et on trouve une primitive par parties).
> Ainsi $K = 2e^1$. Finalement, l'unique solution est $t \mapsto t^t(2e^{1-t} + t - 1)$

Exercice 2 (Révisions sur les EDL2)

1. Donner les solutions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles des équations différentielles suivantes.
   (a) $y'' - 16y = 0$

> **Correction** :
> $x \mapsto Ae^{4x} + Be^{-4x}$ pour $A, B \in \mathbb{R}$ quelconques.

   (b) $y'' + 4y = 0$

> **Correction** :
> $x \mapsto A\cos(2x) + B\sin(2x)$ pour $A, B \in \mathbb{R}$ quelconques ($\alpha = 0, \beta = 2$)

   (c) $y'' + 4y\prime + 4y = 0$

> **Correction** :
> x $\mapsto (Ax+B)e^{-2x}$ pour $A, B \in \mathbb{R}$ quelconques.

(d) $y'' + 2y' + 2y = 0$

> **Correction** :
> $x \mapsto e^{-x}(A\cos x + B\sin x)$, pour $A, B \in \mathbb{R}$ quelconques.
> Le discriminant est $-4 = (2i)^2$.

2. Donner la ou les solutions de
   (a) $y''(x) + y(x) = \cos(x)$.

> **Correction** :
> $x \mapsto A\cos x + B\sin x + \frac{x}{2}\sin(x)$ en passant en complexe et cherchant une solution partie réelle de Kxe^{ix} où K est une constante à déterminer.

   (b) $y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = e^t$, $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$.

> **Correction** :
> Les solutions de l'équation homogènes sont de la forme $x \mapsto Ae^x + Be^{2x}$.
> On veut en plus $A + B = 1$ et $A + 2B = 2$. Donc $A = 0$ et $B = 1$.

Exercice 3
Résoudre $x^2y''(x) + 4xy'(x) - (x^2-2)y(x) = 0$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\mathbb{R}^{-*}$ puis sur $\mathbb{R}$.
(on pourra poser $z : x \mapsto x^2y(x)$)

> **Correction** :
> $z = x^2y$ puis $z' = x^2y' + 2xy$ puis $z'' = x^2y'' + 4xy' + 2y$
> on trouve $z'' - z = 0$ donc $z = \lambda e^x + \mu e^{-x}$
> donc $y(x) = \lambda\dfrac{1}{x^2}e^x + \mu\dfrac{1}{x^2}e^{-x}$ pour $x > 0$ ou $x < 0$
> solutions sur $\mathbb{R}$: $\mu = \lambda = 0$, donc seulement la solution nulle.

Exercice 4
On considère l'équation différentielle (E) : $y''(x) - 2xy'(x) - 2y(x) = 0$.

1. Déterminer une fonction f solution de (E) sur $\mathbb{R}$ et telle que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$, sous forme de fonction développable en série entière.
2. Montrer que f ne s'annule pas.
3. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.

> **Correction** :
> a) On suppose f développable en série entière au voisinage de 0 on écrit alors
> $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n$; $f'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n-1}$ et $f''(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n-2}$
> puis :
>
> $$\forall x \in \mathbb{R} \quad f''(x) - 2xf'(x) - 2f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - 2\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^n - 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx$$
> $$= 2a_2 - 2a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2} - 2(n+1)a_n\right]x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2} - 2(n+1)a_n\right]x^n$$
>
> $f(0) = 1 \Rightarrow a_0 = 1$ et $f'(0) = 0 \Rightarrow a_1 = 0$
> si f est bien développable en série entière alors
>
> $$a_0 = 1; a_1 = 0 \text{ et } \forall n \geq 2 \ a_{n+2} = \frac{2}{n+2}a_n$$

D'où : $\forall n \in \mathbb{N}\ a_{2n+1} = 0$ et $a_{2n} = \dfrac{2^n}{\prod_{k=0}^{n-1}(2k+2)} = \frac{1}{n!}$

Donc nécessairement au voisinage de 0, $\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n!} = e^{x^2}}$

Réciproquement, la fonction $x \mapsto e^{x^2}$ est solution sur $\mathbb{R}$ (par calcul direct ou avec les séries entières en remontant le calcul précédent).
D'après Cauchy-Lipschitz, c'est l'unique solution.
b) *c'est clair, on peut donc utiliser l'astuce d'un changement de fonction pour résoudre complètement l'équation différentielle.*
c) on écrit $y = fz \quad y' = f'z + fz' \quad y'' = f''z + 2f'z' + fz''$
$y'' - 2xy' - 2y = fz'' + (2f' - 2xf)\,z' + \underbrace{(f'' - 2xf' - 2f)}_{=0}z = fz'' + (2f' - 2xf)\,z' = 0$
D'où $z'' = 2\left(x - \frac{f'}{f}\right)z'$ (rappel : f ne s'annule pas !)
ce qui en remplaçant s'écrit : $z' = K\frac{e^{x^2}}{(f(x))^2} = Ke^{-x^2}$.
Choisissons $K \neq 0$ (solution f), par exemple $K = 1$
d'où $y(x) = f(x)\left(\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t + C\right)$
Par exemple la fonction $\boxed{g(x) = e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t}$ est une autre solution de l'équation différentielle libre avec f : $(g(0) = 0$ et $g'(0) = 1)$
Conclusion $\mathcal{S} = \mathrm{Vect}(f, g)$

Exercice 5
On considère l'équation (E) $(1 + x^2)y''(x) + xy'(x) - y(x) = 0$.

1. Déterminer une solution polynomiale sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer les solutions de (E).

Correction :

1. Une étude du coefficient dominant montre que le seul degré convenable est 1 et on constate que $y_1 : x \mapsto x$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.
2. Cherchons une solution sur $]0, +\infty[$ sous la forme $y_2 : x \mapsto \lambda(x)y_1(x)$. où λ est l'inconnue, de classe $\mathcal{C}^2$.
   Alors pour $x > 0$, y_2 est solution de (E) ssi $(1 + x^2)\lambda''(x)y_1(x) + \lambda'(x)(2(1 + x^2)y_1'(x) + xy_1(x)) = 0$ ssi $\lambda''(x) + \left(\frac{2}{x} + \frac{x}{1+x^2}\right)\lambda'(x) = 0$.
   En posant $g = \lambda'$, g est solution d'une équation linéaire d'ordre 1 et $g : x \mapsto e^{-2\ln(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)} = \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}$ convient (on cherche une solution y_2, on peut choisir g).
   On a alors $\lambda(x) = \displaystyle\int_.^x \frac{1}{t^2\sqrt{1+t^2}}dt$ où le . représente une constante de $]0, +\infty[$. On pose $u = \frac{1}{t}$ ie $t = \frac{1}{u}$. Alors $\mathrm{d}u = -\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ et on a
   $$\lambda(x) = \int_.^{\frac{1}{x}} \frac{-\mathrm{d}u}{\sqrt{1 + \frac{1}{u^2}}} = -\int_.^{\frac{1}{x}} \frac{u}{\sqrt{1 + u^2}}\mathrm{d}u$$
   et on reconnaît une forme $f'f^\alpha$ d'où le résultat $\lambda(x) = -\left[(1 + u^2)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{x}} = -\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$.
   Finalement $y_2 : x \mapsto \lambda(x)y_1(x) = -\sqrt{1 + x^2}$ est solution de (E) sur $]0, +\infty[$ et le calcul de vérification montre que y_2 est solution sur $\mathbb{R}$ en fait.
   Ainsi l'ensemble des solutions de (E) est $\mathrm{Vect}(y1, y_2)$. Dit autrement, les solutions de (E) sont les fonctions de la forme $y : x \mapsto k_1x + k_2\sqrt{1 + x^2}$ où k_1, k_2 sont des constantes quelconques (on a changé y_2 en $-y_2$ ce qui ne modifie pas l'espace vectoriel engendré).

Exercice 6

1. Vérifier que la fonction $f : x \to (\arcsin x)^2$ est solution sur $]-1, 1[$ de l'équation différentielle
$$\left(1 - x^2\right)y''(x) - xy'(x) = 2. \qquad \text{(E)}$$

2. On cherche une fonction développable en série entière vérifiant (??) ainsi que les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$.
   On cherchera y sous la forme $y(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$ où les a_n sont des réels à déterminer.
   (a) Montrer que pour $n \geqslant 1$ on a $a_{n+2} = \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} a_n$.
   (b) En déduire l'expression de a_{2n+1} puis celle de a_{2n} pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. En déduire que f est développable en série entière sur $]-1,1[$ et donner son développement.
4. Bonus : Montrer que la série converge pour $x = 1$. Que dire sur sa limite ?

Correction :
C'est un simple calcul.
La recherche des solutions DSE fournit :

$$a_2 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 1, \quad a_{n+2} = \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} a_n$$

D'autre part , on s'intéresse à la solution DSE telle que $a_0 = a_1 = 0$.
On en déduit que tous les a_{2n+1} sont nuls et que :

$$a_2 = 1 \quad , \quad a_4 = \frac{2^2}{3.4} \quad , \quad a_6 = \frac{4^2}{5.6} a_4 = \frac{2^2.4^2}{3.4.5.6}$$

et plus généralement : $a_{2n} = 2\dfrac{2^2 \cdot 4^2 \cdot \cdots \cdot (2n-2)^2}{(2n)!} = 2^{2n-1}\dfrac{((n-1)!)^2}{(2n)!}$ pour $n \geq 1$.
Le rayon de convergence de la série entière vaut 1 (regarder la relation de récurrence entre a_{2n+2} et a_{2n}).
Enfin, on applique le théorème de Cauchy Lipschitz pour utiliser l'unicité d'une solution au problème de Cauchy $y(0) = y'(0) = 0$.
La convergence pour $x = 1$ vient de ce que tous les a_{2n} sont positifs ou nuls et que la somme de la série est majorée sur $[0,1]$ par $\dfrac{\pi^2}{4}$.
La somme d'une série entière étant continue sur son ensemble de définition, la somme de la série pour $x = 1$ vaut $\dfrac{\pi^2}{4}$.

Exercice 7
Déterminer les solutions développables en série entière de l'équation différentielle

$$x^2(1-x)\,y''(x) - x(1+x)\,y'(x) + y(x) = 0.$$

Reconnaître les sommes des séries trouvées.
En déduire toutes les solutions de cette équation différentielle sur $\mathbb{R}^{-*}$, $]0,1[$ ou $]1,+\infty[$.

Correction :
On trouve $a_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(n-1)^2 a_{n-1} = (n-1)^2 a_n$
Donc : $a_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = a_1$.
La série entière trouvée s'écrit : $\sum\limits_{n \geq 1} a_1 x^n$; elle a pour rayon 1 sauf si $a_1 = 0$.
Sa somme définie sur $]-1,1[$ est la fonction $x \to \dfrac{x}{1-x}$.
Cette fonction est en fait solution sur chacun des intervalles $\mathbb{R}^{-*}$, $]0,1[$ ou $]1,+\infty[$.
Le changement de fonction inconnue sur I (un des trois intervalles ci dessus) $z(x) = \dfrac{y(x)(1-x)}{x}$ conduit à :
$x\left(u(x) + xu'(x)\right) = 0$ où on a posé $z'(x) = u(x)$
D'où $u(x) = K\exp(-\ln|x|) = \dfrac{K}{|x|} = \dfrac{C}{x}$ et $z(x) = C\ln|x| + D$ puis $\boxed{y(x) = \dfrac{x}{1-x}(C\ln|x| + D).}$