Plan tangent

Exercice 1
Trouver les plans tangents à la surface $\mathcal{S}$ d'équation $x^2+y^2+4z^2=1$ et parallèles au plan d'équation $x+2y+z=0$.

> **Correction** :
> Soit $M_0=(x_0,y_0,z_0)$ un point de $\mathcal{S}$.
> Le gradient de F au point M_0 est le vecteur $\overrightarrow{N}=(2x_0,2y_0,8z_0)$.
> Il est non nul puisque $\|\overrightarrow{N}\|^2=4(x_0^2+y_0^2+16z_0^2)>0$.
> La surface $\mathcal{S}$ est donc régulière. La normale à $\mathcal{S}$ au point M_0 est aussi dirigée par le vecteur $\overrightarrow{N_1}=(x_0,y_0,4z_0)$.
> Pour que le plan tangent au point M_0 soit parallèle au plan d'équation $x+2y+z=0$, il faut et il suffit qu'il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{N_1}=\lambda(1,2,1)$, c'est à dire tel que $x_0=\lambda$, $y_0=2\lambda$ et $4z_0=\lambda$.
> La relation $x_0^2+y_0^2+4z_0^2=1$ équivaut alors à $\lambda^2=\dfrac{4}{21}$, et donc à $\lambda=\pm\dfrac{2}{\sqrt{21}}$.
> On obtient donc deux points symétriques par rapport à l'origine. $M_0=\dfrac{2}{\sqrt{21}}(1,2,1/4)$ et $M_0'=-M_0$.
> Les plans tangents à $\mathcal{S}$ en M_0 et M_0' sont les plans d'équation respective $x+2y+z=\dfrac{\sqrt{21}}{2}$ et $x+2y+z=-\dfrac{\sqrt{21}}{2}$.

Exercice 2
On considère la surface $S : x-8yz=0$ et la droite $\mathcal{D} : \begin{cases} y=1 \\ x+4z+2=0 \end{cases}$.

Déterminer les plans tangents à S qui contiennent la droite $\mathcal{D}$.

> **Correction** :
> Posons $f:(x,y,z)\mapsto x-8yz$ qui est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$. En $M_0=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}\in S$, le gradient de f est $(1,-8z_0,-8y_0)\neq\vec{0}$ donc M_0 est un point régulier et le plan tangent en M_0 est
> $$\mathcal{P}_0 : (x-x_0)-8z_0(y-y_0)-8y_0(z-z_0)=0 \iff x-8z_0y-8y_0z+x_0=0$$
> car $M_0\in S$ donc $x_0=8y_0z_0$.
> De plus, $D=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}+\mathrm{Vect}\begin{pmatrix}-4\\0\\1\end{pmatrix}$. On cherche M_0 tel que $\mathcal{D}\subset\mathcal{P}_0$ c'est à dire $\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}\in\mathcal{P}_0$ et $\begin{pmatrix}-4\\0\\1\end{pmatrix}$ est dans la direction de $\mathcal{P}_0$ (solution de l'équation homogène), ainsi $\begin{cases}-2-8z_0+x_0=0\\-4-8y_0=0\end{cases}$.
> En ajoutant la condition $M_0\in S$ on obtient $M_0=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{6}\end{pmatrix}$.

Surfaces réglées

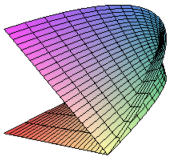
Exercice 3 (Application directe du cours)
1. On considère $f:(x,y)\mapsto x^3-3xy$. Montrer que f possède un unique point critique qui est un point col de sa surface représentative.
2. Montrer que la surface $S : z=x^3-3xy$ est réglée.

> **Correction** :
> Calcul du gradient, puis de la matrice hessienne en 0, qui est de déterminant $-9<0$ et on obtient bien un point col.
> La paramétrisation en tant que surface représentative donne une paramétrisation de surface réglée.

Exercice 4
Soit $\mathcal{S}$ la surface définie par les équations paramétriques
$$x=u^2 \quad , \quad y=uv \quad , \quad z=u-v$$

Montrer que $\mathcal{S}$ est une surface réglée.
Donner le plan tangent en un point régulier.

Correction :
Posons $F(u,v) = \left(u^2, uv, u-v\right)$.
On a $F(u,v) = \left(u^2, 0, u\right) + v\,(0, u, -1)$, donc $\mathcal{S}$ est réglée.
$x = u^2, y = uv, z = u - v$



$\dfrac{\partial F}{\partial u}(u,v) = (2u, v, 1)$ et $\dfrac{\partial F}{\partial v}(u,v) = (0, u, -1)$.
$(2u, v, 1) \wedge (0, u, -1) = \left(-(u+v), 2u, 2u^2\right)$.
Seul $(0,0)$ est un point singulier.
$\mathcal{T}_{(u,v)}\mathcal{S} : -(u+v)X + 2uY + 2u^2 Z = -(u+v)u^2 + 2uuv + 2u^2\,(u-v) = u^2\,(u-v)$.

Exercice 5
On considère la courbe $\Gamma : \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2 \\ z(t) = t+1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ et le point $\Omega : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Soit S la surface réglée obtenue comme réunion de toutes les droites passant par un point de Γ et Ω (ce genre de surface réglée est appelé un cône).

1. Donner une paramétrisation de S.
2. Donner une équation cartésienne de S (ou au moins d'une surface contenant S).

Correction :
On note Σ le cône considéré.
Soit $M = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. $M \in \Sigma$ ssi il existe $t \in \mathbb{R}$ telle que $M \in (\Omega\Gamma(t))$.
Comme $\Gamma(t) \neq \Omega$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $M \in (\Omega\Gamma(t))$ ssi il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{\Omega M} = k\overrightarrow{\Omega\Gamma(t)}$ ssi $M = \Omega + k\overrightarrow{\Omega\Gamma(t)}$ ssi $M = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} t-1 \\ t^2-1 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+k(t-1) \\ 1+k(t^2-1) \\ 1+kt \end{pmatrix}$. Ceci est une paramétrisation de S (avec $t, k \in \mathbb{R}$)
On a ainsi, si $M \in S$, $x = 1 + kt - k$, $y = 1 + kt^2 - k$ et $z = 1 + kt$ et donc $x - z = -k$ ou encore $k = z - x$. De plus, $kt = z - 1$ et $kt^2 = y - 1 + k = z - x + y - 1$. Donc $(kt)^2 = (z-1)^2 = k \times kt^2 = (z-x)(-x+y+z-1)$. Finalement, M vérifie l'équation
$$(z-1)^2 - (z-x)(-x+y+z-1) = 0$$
Réciproquement, si M vérifie l'équation précédente, on pose $v = z - x$. Si $v = 0$, alors $(z-1)^2 = 0$ et donc $z = 1$. On en déduit $x = 1$. Par contre, y peut prendre une valeur quelconque dans ce cas. Alors que les points de S vérifiant $x = 1$ et $z = 1$ ont des paramètres k et t vérifiant $kt - k = 0$ et $kt = 0$ ie $k = 0$ et il n'y a en fait que le point Ω qui convient.
Ainsi $S \neq \Sigma$.
Par contre, dans le cas $v \neq 0$ ie $x \neq z$, on peut poser $u = \frac{z-1}{v}$. Alors on obtient $(uv)^2 - v(y - v - 1) = 0$, ou encore $u^2 v = y - v - 1$, soit $y = 1 + v(u^2+1)$. De plus, $z = uv + 1$ et alors $x = z - v = 1 + u(v-1)$ et on retrouve exactement la forme paramétrée de S.
Ainsi $S = (\Sigma \backslash \mathcal{D}) \cup \{\Omega\}$ où $\mathcal{D}$ est la droite $\{\begin{pmatrix} 1 \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R}\} = \Omega + \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})$.
Remarque : on peut remarquer que Γ est en fait une courbe plane. et ce n'est pas si difficile à prouver : En effet, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$, $z(t) - x(t) = 1$ donc Γ est incluse dans le plan d'équation $z - x = 1$.

Exercice 6
On considère la courbe $\Gamma : \begin{cases} x^2+2y^2-z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ et le vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Soit Σ la surface réglée réunion des droites passant par un point de Γ et dirigées par $\vec{u}$ (ce genre de surface est appelée cylindre). Donner une équation cartésienne de Γ.

> **Correction :**
>
> — **Sans paramétrer :**
> Soit $M : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. $M \in \Sigma$ ssi il existe $M_0 \in \Gamma$ et $k \in \mathbb{R}$ tels que $M = M_0 + k\vec{u} = \begin{pmatrix} x_0+k \\ y_0+k \\ z_0-k \end{pmatrix}$ ssi (il existe...) $\begin{cases} x = x_0+k \\ y = y_0+k \\ x+y+z=k \end{cases}$ ou encore $\begin{cases} -y-z = x_0 \\ -x-z = y_0 \\ x+y+z=k \end{cases}$
> Or $x_0^2+2y_0^2+x_0+y_0=0$ Ainsi, si $M \in \Sigma$ alors $(y+z)^2+(x+z)^2-x-y-2z=0$.
> Réciproquement, si M vérifie l'équation $(y+z)^2+2(x+z)^2-x-y-2z=0$, posons $k=x+y+z$ et $M_1 = M - k\vec{u} = \begin{pmatrix} -y-z \\ -x-z \\ x+y+2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$. On a bien $x_1+y_1+z_1=0$ et $(-x_1)^2+2(-y_1)^2-z_1=0$ ie $M_1 \in \Gamma$ ce qui prouve que $M \in \Sigma$.
> Finalement, $\Sigma : (y+z)^2+(x+z)^2-x-y-2z=0$.
>
> — **Paramétrisation :**
> On souhaite paramétrer la courbe Γ pour commencer. $M : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est un point de Γ ssi $z=-x-y$ et $x^2+2y^2+x+y=0$ ssi $z=-x-y$ et $(x+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}+2(y^2+\frac{1}{2}y)=0$ ssi $z=-x-y$ et $(x+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}+2(y+\frac{1}{4})^2-\frac{1}{8}=0$ ssi $z=-x-y$ et $(x+\frac{1}{2})^2+2(y+\frac{1}{4})^2=\frac{3}{8}$
> On reconnaît, dans le plan (xOy) (ou encore, la projection de Γ sur ce plan), une ellipse de centre $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix}$ que l'on peut paramétrer par $x = -\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{3}{8}}\cos(t)$ et $y = -\frac{1}{4}+\sqrt{\frac{3}{16}}\sin(t)$ pour un $t \in [-\pi, \pi]$. On en déduit $z = -x-y = \frac{3}{4}-\sqrt{\frac{3}{8}}\cos(t)-\sqrt{\frac{3}{16}}\sin(t)$.
> On en déduit une paramétrisation de Σ : $\begin{cases} x = -\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{3}{8}}\cos(t)+k \\ y = -\frac{1}{4}+\sqrt{\frac{3}{16}}\sin(t)+k \\ z = \frac{3}{4}-\sqrt{\frac{3}{8}}\cos(t)-\sqrt{\frac{3}{16}}\sin(t)-k \end{cases}$ (traduisant $M = \Gamma(t)+k\vec{u}$)
> On a alors, pour $M \in \Sigma$, $x+y+z=k$ et $x+\frac{1}{2}-k = \sqrt{\frac{3}{8}}\cos(t)$, $y+\frac{1}{4}-k = \sqrt{\frac{3}{16}}\sin(t)$ et donc $(\frac{1}{2}-y-z)^2+(\sqrt{2}(\frac{1}{4}-x-z))^2 = \frac{3}{8}$ qui est l'équation d'une surface S contenant Σ.
> Si maintenant $M_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ vérifie l'équation de S, on il existe un $t \in [-\pi, \pi]$ tel que $\frac{1}{2}-y-z = \sqrt{\frac{3}{8}}\cos(t)$ et $\sqrt{2}(\frac{1}{4}-x-z) = \sqrt{\frac{3}{8}}$. Si on pose en plus $k=x+y+z$, on retrouve bien la paramétrisation de Σ et donc $M_1 \in \Sigma$ ce qui prouve que $S = \Sigma$.

Révolution

Exercice 7
Déterminer une équation de la surface S de révolution de $\Gamma : \begin{cases} x^2-z^2=1 \\ y=0 \end{cases}$ autour de $\Delta = (Ox)$.

Exercice 8
On considère la courbe $\mathcal{C}$ paramétrée par $\begin{cases} x(t) = \cos^3(t) \\ y(t) = \sin^3(t) \\ z(t) = \cos(2t) \end{cases}$, $t \in [-\pi, \pi]$. Déterminer une équation de la surface de révolution de $\mathcal{C}$ autour de (Oz).

Correction :
On note S cette surface.
Soit M de coordonnées cylindriques (ρ,θ,z). Alors $M\in S$ ssi il existe $t\in[-,\pi,\pi]$ tel que $\rho^2=\rho(t)^2=x(t)^2+y(t)^2$ et $z=z(t)=\cos(2t)$ ssi il existe t tel que $x^2+y^2=\cos^6(t)+\sin^6(t)$ et $z=\cos(2t)$.
Or $\cos^6(t)+\sin^6(t)=(\cos^2(t))^3-(-\sin^2(t))^3=(\cos^2(t)-(-\sin^2(t)))(\cos^4(t)-\cos^2(t)\sin^2(t)+\sin^4(t))=\cos^4(t)-\cos^2(t)\sin^2(t)+\sin^4(t)$.
Or $z^2=(\cos^2(t)-\sin^2(t))^2=\cos^4(t)-2\cos^2(t)\sin^2(t)+\sin^4(t)$
Ainsi, $x^2+y^2-z^2=\cos^2(t)\sin^2(t)$. Comme de plus, $\cos(2t)=2\cos^2(t)-1=1-2\sin^2(t)$, on obtient $x^2+y^2-z^2=\frac{z+1}{2}\frac{1-z}{2}$ et donc S est contenue dans la surface Σ d'équation $x^2+y^2-z^2=\frac{1-z^2}{4}\iff x^2+y^2-\frac{3}{4}z^2=\frac{1}{4}$.
Seulement, les point de S vérifient $z=z(t)$ pour un $t\in[-\pi,\pi]$ et donc $z\in[-1,1]$, ce qui n'est pas le cas des points de Σ.
Par contre, si on considère la surface $x^2+y^2-\frac{3}{4}z^2=\frac{1}{4}$ et $z\in[-1,1]$, alors on peut poser $z=\cos(2t)$ et les calculs précédents montrent que $x^2+y^2=\cos^6(t)+\sin^6(t)=\rho(t)^2$ et donc cette surface est bien S (car elle obtenue de Γ par révolution autour de (Oz)).

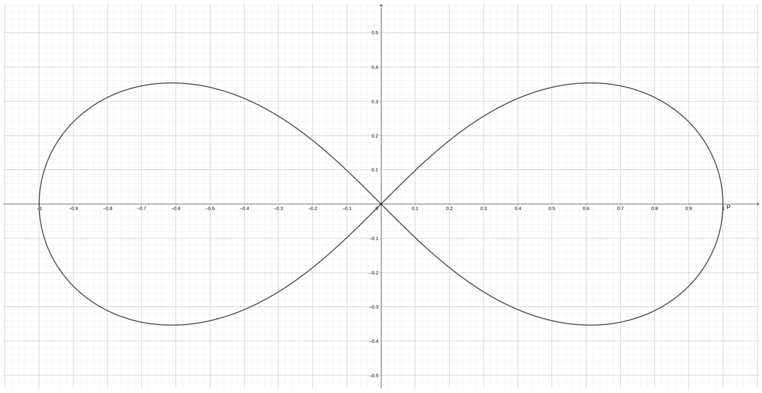
Exercice 9
Soit $S:(x^2+y^2+z^2)^2=a^2(x^2-y^2-z^2)$ (où $a>0$ est fixé). Montrer que S est une surface de révolution autour d'un axe à préciser et tracer une méridienne. [1]

Correction :
Remarque : on voit sur l'équation que la quantité y^2+z^2 apparaît dans chaque membre.
Soit $M=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$. Supposons que $M\in S$. Soit $M_0=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}$ tel que $\overrightarrow{MM_0}\perp(Ox)$ et $d(M,(Ox))=d(M_0,(Ox))$. Alors $x_0=x$ et $y_0^2+z_0^2=y^2+z^2$. Ainsi, $(x_0^2+y_0^2+z_0^2)^2=a^2(x_0^2-(y_0^2+z_0^2))$ et donc $M_0\in S$. Ainsi S est bien une surface de révolution autour de (Ox).
Une méridienne est une courbe intersection de S et d'un demi-plan contenant (Ox). On choisit le plan $\mathcal{P}:z=0$ pour tracer une double méridienne. Alors $M\in S\cap\mathcal{P}$ ssi $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$.
Posons $r=\sqrt{x^2+y^2}$ et $\theta\in[-\pi,\pi]$ tel que $x=r\cos\theta$ et $r=r\sin\theta$. Alors $M\in S\cap\mathcal{P}$ ssi $r^4=a^2r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)$ ssi $r^4=a^2r^2\cos(2\theta)$ ssi $r=0$ ou $r^2=a^2\cos(2\theta)$.
Cette dernière équation ne peut avoir que si $\cos 2\theta\geqslant 0$ ie $\theta\in[-\frac{\pi}{4}+k\pi,\frac{\pi}{4}+k\pi]$ pour un $k\in\mathbb{Z}$. On a alors $r=a\sqrt{\cos(2\theta)}$ ie $x=a\sqrt{\cos 2\theta}\cos\theta$ et $y=a\sqrt{\cos 2\theta}\sin\theta$ (dans le plan (xOy)).
Remarquons que $x(\theta+\pi)=-x(\theta)$ et $y(\theta+\pi)=-y(\theta)$ donc on peut étudier cette courbe sur $[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]$ et compléter par symétrie par rapport à O. De plus x est paire et y impaire et donc on étudie la méridienne sur $[0,\frac{\pi}{4}]$ et on complète le tracé par symétrie par rapport à (Ox).
De plus, x et y sont $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,\frac{\pi}{4}[$ et $x(\theta)\underset{0}{\sim}a$ et $y(\theta)\underset{0}{\sim}a\theta$. Ainsi la tangente en $\theta=0$ est dirigée par $\begin{pmatrix}0\\a\end{pmatrix}$ car x est paire et donc sont DL en 0 ne comporte que des termes de degrés pairs.
x est clairement décroissante par produit de deux fonctions décroissantes et positives. Pour $\theta\in[0,\frac{\pi}{4}[$

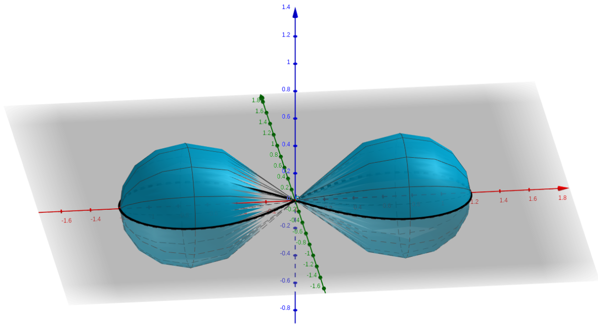
$$y'(\theta)=a(\frac{-\sin(2\theta)}{\sqrt{\cos 2\theta}}\sin\theta+\sqrt{\cos(2\theta)}\cos\theta)=a\frac{\cos(2\theta)\cos\theta-\sin 2\theta\sin\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}=\frac{a\cos 3\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}$$

Ainsi y est strictement croissante sur $[0,\frac{\pi}{6}]$ puis strictement décroissante sur $[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}[$ et on trouve un tangente horizontal en $\theta=\frac{\pi}{6}$.
Pour trouver l'éventuelle tangente en $\theta=\frac{\pi}{4}$, on revient à la définition et on calcule la limite, si elle existe de $\frac{f(\theta)-f(\frac{\pi}{4})}{\|f(\theta)-f(\frac{\pi}{4})\|}$ où f est notre courbe paramétrée. Ici on a $f(\frac{\pi}{4})=\vec{0}$ et $\|f(\theta)\|=r=\sqrt{\cos 2\theta}$. Ainsi la fraction précédente devient $\begin{pmatrix}a\cos\theta\\a\sin\theta\end{pmatrix}\underset{\theta\to\frac{\pi}{4}}{\to}\begin{pmatrix}a\\a\end{pmatrix}$ et on obtient la droite d'équation $y=x$ comme tangente.

1. Indication : pour la méridienne, on pourra d'abord chercher une équation sur les coordonnées polaires.



Puis une représentation de cette surface de révolution autour de (Ox)



Approfondissement

Exercice 10
Soit $a > 0$, et soit Γ l'intersection de la sphère $\mathcal{S}$ d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ et du cylindre $\mathcal{C}$ d'équation $x^2 + y^2 - ax = 0$.

1. Déterminer une paramétrisation de Γ.
2. Quel est la tangente à Γ en l'un de ses points ?
3. Soit P le point d'intersection de la tangente à Γ en un point M avec le plan $(x0y)$. Déterminer le lieu de P lorsque M parcourt Γ.

Correction :

1. L'intersection du cylindre $\mathcal{C}$ avec le plan $x0y$ est la courbe d'équation $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{a^2}{4}\right)$. C'est le cercle de centre $A = (\frac{a}{2}, 0, 0)$ et de rayon $\frac{a}{2}$.
Les points de $\mathcal{C}$ sont les points $M = (x, y, z)$ tels que
$$x = \frac{a}{2}(1 + \cos(\theta)) = a\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right), y = \frac{a}{2}\sin(\theta) = a\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \theta \in [0, 2\pi] \text{ et } z = v \in \mathbb{R} \text{ quelconque.}$$
Pour qu'un tel point M appartienne à Γ, il faut et il suffit que $z^2 = a^2 - x^2 - y^2$, c'est à dire $z^2 = a^2\left(1 - \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) = a^2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$. On a donc $z = \pm a\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$. Comme $-\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sin\left(-\frac{\theta}{2}\right)$, la courbe

Γ peut être décrite par le paramétrage :

$$\begin{cases} x = a\cos^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right) \\ y = a\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) \qquad \theta \in [-2\pi, 2\pi] \\ z = a\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right) \end{cases}$$

La tangente à Γ au point M de paramètre θ est dirigée par le vecteur

$$(x'(\theta), y'(\theta), z'(\theta)) = \frac{a}{2}\left(-\sin(\theta), \cos(\theta), \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right).$$

C'est aussi l'intersection du plan tangent à la sphère $\mathcal{S}$ (le plan passant par M et perpendiculaire au rayon OM), et du plan tangent au cylindre $\mathcal{C}$ (le plan passant par la projection orthogonale m de M sur le plan $(x0y)$, et perpendiculaire à la droite (Am)).

2. On déduit des calculs précédents un paramétrage de la tangente à Γ au point M de paramètre θ :

$$\begin{cases} x = a\cos^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right) - \lambda\dfrac{a}{2}\sin(\theta) \\ y = a\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) + \lambda\dfrac{a}{2}\cos(\theta) \qquad \lambda \in \mathbb{R}. \\ z = a\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right) + \lambda\dfrac{a}{2}\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) \end{cases}$$

Pour $\theta \neq \pm\pi$, le point P où la tangente coupe le plan $(x0y)$ correspond à la valeur $\lambda = -2\tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$ et les coordonnées de P sont alors

$$\begin{cases} x = a\cos^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right) + a\tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\sin\theta \\ y = a\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) - a\tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\cos\theta \\ z = 0 \end{cases}$$

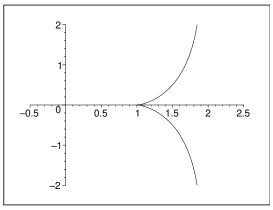
On obtient alors aisément

$$x = a + a\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \text{ et } y = a\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) - a\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right),$$

et, en posant $t = \tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$, $x = a + a\dfrac{t^2}{1+t^2}$, $y = a\dfrac{t^3}{1+t^2}$.
Le lieu de P est donc la courbe du plan $(x0y)$ définie par la paramétrisation

$$\begin{cases} x = a + a\dfrac{t^2}{1+t^2} \\ y = a\dfrac{t^3}{1+t^2} \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Il s'agit d'une cissoïde droite.



Exercice 11
Soient $a, b, c > 0$. on considère la surface $S : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.

1. Pour $\theta \in [0, 2\pi]$, on considère le point $A_\theta = \begin{pmatrix} a\cos\theta \\ b\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \in S$. Montrer qu'il existe exactement deux droites passant par A_θ et contenue dans S.

Correction :
On cherche les vecteurs directeurs de norme 1 qui dirigent une droite passant par A_θ et qui sont contenues dans S.
Notons $\vec{u} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ un vecteur de norme 1. On cherche des conditions sur $\vec{u}$ pour que $\forall k \in \mathbb{R}\ A_\theta + k\vec{u} \in S$.
On doit donc avoir

$$\frac{a^2\cos^2\theta + 2ka\alpha\cos\theta + k^2\alpha^2}{a^2} + \frac{b^2\sin^2\theta + 2kb\beta\sin\theta + k^2\beta^2}{b^2} - \frac{k^2\gamma^2}{c^2} = 1$$

ou encore

$$k^2\left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - \frac{\gamma^2}{c^2}\right) + 2k\left(\frac{\alpha}{a}\cos\theta + \frac{\beta}{b}\sin\theta\right) = 0$$

Comme cette expression polynomiale doit être nulle pour tout k, ses coefficients sont nuls (infinité de racines, donc au moins 3).
Ainsi, en multipliant le coefficient de k par ab on obtient $\alpha \times b\cos\theta + \beta \times a\sin\theta = 0$ ou encore $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} b\cos\theta \\ a\sin\theta \end{pmatrix}$.
On en déduit que $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -a\sin\theta \\ b\cos\theta \end{pmatrix}$ pour un certain $t \in \mathbb{R}^*$.
Le coefficient de k^2 étant nul, on a alors $\gamma^2 = c^2t^2$ c'est-à-dire $\gamma = \pm ct$.
Il y a exactement deux valeurs de t qui font de $\vec{u}$ un vecteur de norme 1 $t = \pm\frac{1}{\sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta + c^2}}$. Deux vecteurs opposés dirigeant la même droite, on trouve exactement deux droites passant par A_θ et complètement contenue dans S, elles sont dirigées par $\begin{pmatrix} -a\sin\theta \\ b\cos\theta \\ c \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -a\sin\theta \\ b\cos\theta \\ -c \end{pmatrix}$ (ce sont bien deux droites distinctes car leurs vecteurs directeurs sont non colinéaires).

2. Soient $x, y, u, v \in \mathbb{R}$ vérifiant $x^2 + y^2 = u^2 + v^2$. Montrer qu'il est possible de trouver $\theta \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} x = u\cos\theta - v\sin\theta \\ y = u\sin\theta + v\cos\theta \end{cases}$$

Correction :
Il s'agit d'écrire $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = r_\theta\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ où r_θ est la rotation du plan d'angle θ.
Notons X, U ces colonnes. Si $U = X = 0$ tout θ convient.
Sinon, on note $\rho = \|U\| = \|X\|$ On complète $\frac{U}{\rho}$ en une base orthonormée directe $\mathcal{B}$ du plan et on considère la matrice $M \in SO_2(\mathbb{R})$ dont la première colonne est $\frac{\|X\|}{\rho}$. Alors $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(r_\theta)$ convient.

3. En déduire deux familles de droites engendrant S puis montrer que toute droite incluse dans S est dans l'une de ces deux familles.

Correction :
Soit $M = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in S$ Alors $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2$. Ainsi on peut poser un θ comme à la question précédente et on a $\begin{pmatrix} x/a \\ y/b \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta - \frac{z}{c}\sin\theta \\ \sin\theta + \frac{z}{c}\cos\theta \\ z \end{pmatrix}$ et donc

$$M = \begin{pmatrix} a\cos\theta \\ b\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} + z\frac{1}{c}\begin{pmatrix} -a\sin\theta \\ b\cos\theta \\ c \end{pmatrix}$$

On reconnaît une paramétrisation de surface réglée.

Si on échange le rôle de 1 et $\frac{z}{c}$ on obtient une autre paramétrisation sous forme de surface réglée.
Si maintenant $\mathcal{D}$ est une droite contenue dans S, alors $\mathcal{D}$ ne peut pas être contenue dans un plan d'équation de la forme $z = \alpha$ où α est une constante, car $S \cap \mathcal{P} : z = \alpha$ est un cercle. Ainsi $\mathcal{D}$ coupe le plan $\mathcal{P}_0 : z = 0$ en un point A_θ et est donc une des droite de la forme précédente (on a retrouvé les deux familles de la question 1).