I Les définitions

I.1 Séries numériques

- On se donne d'abord une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres et on considère la série $\sum u_n$. Cette série est une **autre** suite, la suite des sommes partielles définie par

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n$$

  Dire que la série $\sum u_n$ converge, c'est dire que la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ (des sommes partielles) converge.
- Lorsque $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n \geqslant 0$, on dit que $\sum u_n$ est une série à termes positifs.
  La suite des sommes partielles est alors croissante et donc possède forcément une limite. Cette limite est soit finie, soit $+\infty$.
- Lorsque $u_n \not\to 0$, on est sûr que la série $\sum u_n$ diverge et on dit que la série diverge grossièrement.
- Lorsque $\sum |u_n|$ (qui est à termes positifs) est une série convergente, on dit que $\sum u_n$ converge absolument, on est alors sûr que la série $\sum u_n$ converge.

> Même lorqu'on ne sait pas calculer explicitement la suite des sommes partielles, on est parfois capable de savoir si $\sum u_n$ converge.

Les exemples de référence

1. $\sum \frac{1}{n}$ diverge et $\lim\limits_{N\to+\infty} \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = +\infty$.
2. $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.
3. Plus généralement, pour $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé, $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$.
4. Pour $z \in \mathbb{C}$ fixé, $\sum z^n$ converge ssi $|z| < 1$.

Piège de notations

Il ne faut pas confondre $\sum u_n$ qui est une série (la suite des sommes partielles) et, pour une série convergente, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ qui est la limite de cette série.

I.2 Séries entières

Cette fois on se donne une suite de nombres $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appelés coefficients. La série entière de la variable t associée est alors $\sum a_n t^n$.

Pour un t_0 fixé (dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), la série numérique $\sum a_n t_0^n$ peut-être convergente ou divergente.

En notant $R = \sup\{r \in [0, +\infty[\ ;\ (a_n r^n) \text{ est bornée}\}$ le rayon de convergence, on peut affirmer que

$$|t_0| < R \Rightarrow \sum a_n t_0^n \text{ converge absolument.}$$

$$|t_0| > R \Rightarrow \sum a_n t_0^n \text{ diverge grossièrement.}$$

Somme d'une série entière

La somme d'une série entière est une **fonction**

$$t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$$

qui est définie partout où la série numérique correspondante converge.

Les exemples de référence

Il faut connaître le développement en série entière (écrire qu'une fonction est égale à une somme de série entière) ainsi que le domaine de convergence des séries considérées pour :

$$e^x,\ \cos(x),\ \sin(x),\ \mathrm{ch}(x),\ \mathrm{sh}(x),\ \frac{1}{1-x},\ \ln(1\pm x),\ (1+x)^\alpha$$

I.3 Intégrales impropres

— On considère une fonction $f : [a, b[\to \mathbb{K}$ continue (on peut avoir $b = +\infty$).
Dire que $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge (ou converge en b), c'est dire que la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ (l'une des primitives de f) possède une limite finie en b.

— On considère une fonction $f :]a, b] \to \mathbb{K}$ continue (on peut avoir $a = -+\infty$).
Dire que $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge, c'est dire que la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_x^b f(t)\mathrm{d}t$ (l'une des primitives de $-f$) possède une limite finie en a.

— On considère une fonction $f :]a, b[\to \mathbb{K}$ continue (on peut avoir $a = -\infty$ et/ou $b = +\infty$).
Dire que $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge, c'est dire que pour un certain $c \in]a, b[$ (que l'on peut choisir comme bon nous semble), les deux intégrales $\displaystyle\int_a^c f(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)\mathrm{d}t$ convergent.

— Comme pour les séries, lorsque $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t$ converge, on dit que $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge absolument (et que f est **intégrable** sur l'intervalle (a, b), bornes ouvertes ou fermées suivant les cas) et on est sûr que $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge.

> Même lorsqu'on ne sait pas calculer explicitement une primitive de f, on est parfois capable de savoir si $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge.

Les exemples de référence

— $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\mathrm{d}t$ converge (en 0).

— $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ converge (en 0) ssi $\alpha < 1$.

— $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ converge (en $+\infty$) ssi $\alpha > 1$.

— $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ diverge pour toute valeur de α.

— $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-kt}\mathrm{d}t$ converge (en $+\infty$) ssi $k > 0$.

II Les méthodes de preuve de convergence

II.1 Sur les séries

1. Par combinaison linéaire. Par produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes.
2. Sur les séries à termes **positifs**, on peut utiliser le théorème de comparaison. Classiquement, on tente d'abord de calculer un équivalent, puis si besoin on compare u_n à un terme général de série de Riemann.
3. Sur les séries alternées ($u_n = (-1)^n |u_n|$), on dispose du théorème du même nom.
4. Pour les autres séries, on étudie la convergence absolue.
5. Dans quelques cas, on peut utiliser la règle de d'Alembert :
   — Vérifier que $u_n \geqslant 0$ pour tout n et $u_n \neq 0$.
   — Calculer la limite ℓ de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.
   — Si $\ell \neq 1$, on peut conclure.

Pièges

— Si u_n, v_n sont de signes constants (toujours positifs, ou toujours négatifs) et qu'on a $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, on peut dire que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

— Si $u_n = o_{+\infty}(\frac{1}{n^\alpha})$ (c'est-à-dire $n^\alpha u_n \underset{+\infty}{\to} 0$) alors on a seulement une implication : Si $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge Alors $\sum u_n$ converge.

Lorsque que l'on veut utiliser le théorème de comparaison, on compare seulement les termes généraux, et pas les séries ! On n'écrit pas $\sum u_n \sim \sum v_n$ ni $\sum u_n = o_{+\infty}\left(\sum v_n\right)$.

II.2 Sur les séries entières

On considère ici des séries entières dont la variable est réelle.
On note $\sum a_n x^n$ une série entière et R son rayon de convergence.

Calcul du rayon

— Si on connaît un $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que la série numérique $\sum a_n x_0^n$ converge, alors $R \geqslant |x_0|$.
On applique cette règle pour déterminer un minorant du rayon de convergence d'une somme ou d'un produit.

— Si on connaît un $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que la série numérique $\sum a_n x_0^n$ diverge, alors $R \leqslant |x_0|$.

— Lorsque $\forall n \in \mathbb{N} a_n \neq 0$ (ou seulement à partir d'un certain rang), on peut utiliser la règle de d'Alembert :
Si $\left(\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right)$ possède une limite ℓ, alors $R = \frac{1}{\ell}$ (avec les conventions classiques si $\ell = 0$ ou $\ell = +\infty$).

Si $a_{2n} = 0$ pour tout n, on peut poser $u_n = |a_{2n+1}x^{2n+1}|$ pour $x \neq 0$, et si (u_n) ne s'annule pas, on peut appliquer la règle de d'Alembert sur les séries numériques et les deux premiers points précédents.

Quand des rayons de convergences sont connus.

— On peut alors utiliser les résultats sur les opérations (somme, produit de Cauchy).

— Convergence de la série dérivée : si $\sum a_n x^n$ est de rayon R, alors $\sum n a_n x^n$ aussi.

— Idem pour l'intégration terme à terme.

Propriétés de la somme

On considère la fonction somme $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et on suppose que le rayon de convergence R est non nul.

— f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$.

— La dérivée de f s'obtient en dérivant chaque terme de la somme (dérivée terme à terme).

— Si $a, b \in]-R, R[$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ peut se calculer en intégrant chaque terme de la somme. En particulier, on peut exprimer ainsi une primitive de f et on prend classiquement $a = 0$.

— Si $\sum a_n R^n$ est convergente, alors f est définie en $x = R$ et est continue en R. On se sait rien de la dérivabilité ni de la dérivée éventuelle en $x = R$.

— De même en $-R$.

II.3 Sur les intégrales

Avant toute chose, il est primordial de justifier rapidement la continuité de la fonction à intégrer et de bien préciser les bornes (ouvertes ou fermées) de l'intervalle d'étude.

Le point fondamental de la méthode.

Il faut obligatoirement préciser avant tout quels sont le ou les points qui nécessitent une étude de convergence.
En particulier, si l'intervalle d'intégration est un segment (comme en sup), aucune étude n'est nécessaire.

Méthodes en commun

— Combinaison linéaire. Pas de produit ici.

— Comparaison de fonctions positives : équivalent, $t^\alpha f(t)$ (seulement en 0 et $+\infty$).

— Convergence absolue.

Prolongement par continuité

Si $a \neq \pm\infty$ est le point d'étude et que $\lim\limits_{t \to a} f(t)$ est finie, on peut prolonger f par continuité en a et "fermer la borne" de l'intervalle d'étude : l'intégrale converge en a.

Étude en a

Lorsqu'on doit étudier une convergence en $a \notin \{0, \pm\infty\}$, on commence par effectuer un changement de variable bijectif et $\mathcal{C}^1$ de la forme $u = t - a$ ou $u = a - t$.

Convergence par changement de variable.

Lorsque que le changement est bijectif et $\mathcal{C}^1$, il conserve la nature des intégrales.
On peut ainsi se ramener à l'étude de la convergence d'une autre intégrale. Voir par exemple le point précédent.

Convergence par intégration par parties

Dans ce cas, on revient à la définition d'une intégrale convergente : on remplace les bornes ouvertes par des variables avant l'IPP (voir la fonction Γ).
Ensuite on étudie la convergence (en faisant tendre une variable vers la borne ouverte correspondante) du crochet et d'une des intégrales. On peut alors conclure par somme ou différence.

II.4 Quelques exemples.

Le plus intéressant est de savoir que ces exemples existent, pas forcément de les connaître par coeur.

— $\sum \frac{1}{n}$ diverge même si $\frac{1}{n} \underset{+\infty}{\to} 0$.

— $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge, mais ne converge pas absolument.

— $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$ converge même si $\frac{1}{\sqrt{t}} \underset{0^+}{\to} +\infty$

— $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$ converge, mais ne converge pas absolument.

— $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(e^t)\mathrm{d}t$ converge même si $t \mapsto \sin(e^t)$ ne tend pas vers 0 en $+\infty$. On peut trouver ce genre d'exemple avec f positive.

III Applications classiques

— Résolution d'équations différentielles en cherchant des solutions DSE (voir la preuve de $(1+x)^\alpha$)

— Calcul de sommes de séries par dérivation terme à terme d'une série entière : voir les calculs en proba.

— Intégrales à paramètres : intégrabilités à vérifier.

— Intégration terme à terme d'une série de fonctions qui n'est pas une série entière. Voir les exemples du cours et du TD.