Devoir en temps libre 12

A rendre le 02/05/2017. Les résultats seront soulignés ou encadrés. Vous pouvez rédiger ce devoir à 2.

Exercice 1
On se place dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On note $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Partie I On considère le sous ensemble E de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ formé des matrices $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant 3}$ pour lesquelles les six nombres $\sum_{j=1}^{3} a_{ij}$ pour $i \in [\![1,3]\!]$ et $\sum_{i=1}^{3} a_{ij}$ pour $j \in [\![1,3]\!]$ sont égaux. Autrement dit, la somme des coefficients d'une ligne et d'une colonne est constante. Si $A \in E$, on note $d(A)$ cette valeur commune.

Par exemple $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in E$ et $d(M) = 6$.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Montrer que
$$A \in E \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}\ AJ = JA = \lambda J.$$
Interpréter le λ ainsi mis en évidence (qui est évidemment unique).
Indice : cette question est la plus importante de la partie I. Elle sera de ré-utilisation constante. On peut y penser comme une simplification (ou un réécriture) de la condition pour qu'une matrice A soit dans E (ie. la partie après la barre "telle que" dans la description de l'ensemble E). Ecrire E sous la forme $E = \{A \in \ldots \mid \ \ldots\}$
2. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
On a montré au passage que l'application $d : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ A & \mapsto & d(A) \end{array} \right.$ vérifie $d(\alpha A + \beta B) = \alpha d(A) + \beta d(B)$ pour tous $A, B \in E$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On dit que d est linéaire.
3. Montrer que le produit de deux matrices de E est encore dans E. Que vaut $d(AB)$ si $A, B \in E$? Comme $I_3 \in E$ on dit que E est un sous-anneau de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
4. Soit $A \in E \cap GL_3(\mathbb{R})$. Montrer que $d(A) \neq 0$ puis que $A^{-1} \in E$.
Comparer $d(A)$ et $d(A^{-1})$.
5. Soit $A \in E$. On pose $B = \frac{d(A)}{3} J$ et $C = A - B$.
   (a) Exprimer J^2 en fonction de J.
   (b) Calculer BC et CB. Indice : nul besoin de coefficients pour ce calcul.
   (c) En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ l'expression de A^n en fonction de B^n et C^n (et seulement ces puissances...)
6. On note $F = \{A \in E \mid d(A) = 0\}$ et $G = \mathrm{Vect}(J)$; montrer que F est un sous-espace de E
7. Montrer que $E = F \oplus G$.
8. Montrer que $\dim F = 4$. On pourra s'intéresser à la matrice du système définissant F (6 équations, 9 inconnues). Quel est le lien entre la dimension cherchée et le rang de ce système ?
9. On note
$$A_{22} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ A_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_{32} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ A_{33} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
Montrer que $(A_{22}, A_{23}, A_{32}, A_{33})$ est une base de F.
10. Calculer la dimension de E et en donner une base.

Partie II On considère maintenant le sous ensemble H de E formé des matrices "magiques", c'est à dire qu'on impose en plus à la somme des coefficients de leurs deux diagonales d'être égales aux somme des coefficients des lignes/colonnes. Formellement, $A \in H$ si et seulement si $A \in E$ et $tr(A) = \sum_{i=1}^{3} a_{ii}$ et $\sum_{i=1}^{3} a_{4-i,i}$ sont égales à $d(A)$.

Par exemple $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in H$.

Un autre exemple étonnant (mais qui n'est pas dans H), qui fait intervenir les 36 premiers entiers :

$$\begin{pmatrix} 27 & 29 & 2 & 4 & 13 & 36 \\ 9 & 11 & 20 & 22 & 31 & 18 \\ 32 & 25 & 7 & 3 & 21 & 23 \\ 14 & 16 & 34 & 30 & 12 & 5 \\ 28 & 6 & 15 & 17 & 26 & 19 \\ 1 & 24 & 33 & 35 & 8 & 10 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que H est un sous-espace vectoriel de E.
2. (a) Rappeler la définition de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique. Même chose pour une matrice antisymétrique.
   (b) Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de taille n et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de taille n sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (c) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En remarquant que $A = \frac{A+{}^tA}{2} + \frac{A-{}^tA}{2}$, montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$
3. Soit $\mathcal{A}$ le sous espace vectoriel de H constitué des matrices de H antisymétriques (pourquoi est-ce un sous-espace ?). Que vaut $d(A)$ pour $A \in \mathcal{A}$?
   Déterminer la dimension et une base de $\mathcal{A}$.
4. Soit $\mathcal{S}$ le sous-espace de H constitué des matrices magiques symétriques : en déterminer une base.
   On prendra bien soin de poser les équations linéaires correspondantes et de les résoudre proprement. Indice : $\dim \mathcal{S} = 2$.
5. Déterminer une base et la dimension de H.