

E et F désignent des ensembles non vides.

Notation

L'ensemble des applications de E dans F est noté F^E .

Rappels

Soit $f \in F^E$.

1. f est une application ie $\forall x \in E \exists ! y \in F y = f(x)$
2. f est injective ssi $\forall x, x' \in E f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$. Tout élément de F admet au plus un antécédent par f .
3. f est surjective ssi $\forall y \in F \exists x \in E y = f(x)$. Tout élément de F admet au moins un antécédent par f .
4. f est bijective ssi f est à la fois injective et surjective ie tout élément de F admet exactement un antécédent par $f : \forall y \in F \exists ! x \in E y = f(x)$.

Exemples et contre-exemples

Injective et non surjective : $\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto e^x \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{array} \right\}$

Surjective non injective : $\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1] \\ x \mapsto \cos(x) \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2(x-1) \end{array} \right\}$.

Bijective : exp, ln (avec les bons ensembles de définitions et d'arrivée), arccos, arctan, sh...

Ni injective ni surjective : à trouver !

Entre ensembles finis

Donner des exemples de la vie courante. Que dire des nombres d'éléments respectifs ?

Proposition 1

Soit $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$.

1. Si f et g sont injectives alors $g \circ f$ aussi.
2. Si f et g sont surjectives alors $g \circ f$ aussi.
3. Si f et g sont bijectives alors $g \circ f$ aussi.

Preuve.

Rappels

Si $f : E \rightarrow F$ est bijective il existe une unique application $f^{-1} : F \rightarrow E$ telle que $f \circ f^{-1} = id_F$ et $f^{-1} \circ f = id_E$.

Si f et g sont bijectives alors $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ (à comparer à la formule pour les matrices).

Proposition 2

Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ avec G un ensemble.

Si $g \circ f$ est injective alors f est injective. Si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective.

Preuve.

Conséquence

Soit $f : E \rightarrow F$ une application. Supposons qu'il existe $g : F \rightarrow E$ telle que $\forall x \in E g(f(x)) = x$ et $\forall y \in F f(g(y)) = y$. Alors f est bijective et sa réciproque est g .