E et F désignent des ensembles non vides.

Notation

L'ensemble des applications de E dans F est noté F^E.

Rappels

Soit $f \in F^E$.

1. f est une application ie $\forall x \in E \exists ! y \in F \ y = f(x)$
2. f est injective ssi $\forall x, x' \in E \ f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$. Tout élément de F admet au plus un antécédent par f.
3. f est surjective ssi $\forall y \in F \exists x \in E \ y = f(x)$. Tout élément de F admet au moins un antécédent par f.
4. f est bijective ssi f est à la fois injective et surjective ie tout élément de F admet exactement un antécédent par f : $\forall y \in F \exists ! x \in E \ y = f(x)$.

Exemples et contre-exemples

Injective et non surjective : $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^x \end{array} \right., \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right.$

Surjective non injective : $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & [-1,1] \\ x & \mapsto & \cos(x) \end{array} \right., \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2(x-1) \end{array} \right.$.

Bijective : $\exp, \ln$ (avec les bons ensembles de définitions et d'arrivée), $\arccos, \arctan, \text{sh}$...

Rien du tout : à trouver !

Proposition

Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$.

1. Si f et g sont injectives alors $g \circ f$ aussi.
2. Si f et g sont surjectives alors $g \circ f$ aussi.
3. Si f et g sont bijectives alors $g \circ f$ aussi.

Preuve.

1. Supposons f et g injectives. Soient $x, x' \in E$ tels que $g(f(x)) = g(f(x'))$. Alors par injectivité de g on a $f(x) = f(x')$ et par injectivité de f on a finalement $x = x'$. Donc $g \circ f$ est injective.
2. Supposons maintenant f et g surjectives. Soit $y \in G$. On doit trouver $x \in E$ tel que $y = g(f(x))$.
   Or g est surjective donc on peut poser $z \in F$ tel que $y = g(z)$.
   Or f est surjective donc on peut poser $x \in E$ tel que $z = f(x)$. On obtient donc $y = g(z) = g(f(x))$.
3. Il suffit de combiner les deux points précédents. ∎

Rappels

Si $f : E \to F$ est bijective il existe une unique application $f^{-1} : F \to E$ telle que $f \circ f^{-1} = id_F$ et $f^{-1} \circ f = id_E$.

Proposition

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ avec G un ensemble.

Si $g \circ f$ est injective alors f est injective. Si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective.

Preuve.

Supposons $g \circ f$ injective. Si on prend $x, y \in E$ tels que $f(x) = f(y)$ alors par composition par une fonction $g(f(x)) = g(f(y))$ et donc $x = y$ par injectivité. Finalement f est injective.

Traitons maintenant la surjectivité.

On a $g \circ f(E) = g(f(E)) \subset g(F)$ car $f(E) \subset F$. Si $g \circ f$ est surjective, on trouve $G \subset g(F)$ et donc $g(F) = G$. ∎

Conséquence

Soit $f : E \to F$ une application. Supposons qu'il existe $g : F \to E$ telle que $\forall x \in E g(f(x)) = x$ et $\forall y \in F f(g(y)) = y$. Alors f est bijective et sa réciproque est g.