Notations Comme d'habitude, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

I Dérivabilité

I.1 Définitions

Définition 1

1. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. On dit que f est dérivable en a si $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie.*
   Dans ce cas on note $f'(a)$ cette limite, et on l'appelle nombre dérivé de f en a. On la note parfois $\frac{df}{dx}(a)$ (quand la variable de f est notée x.)
   Il est équivalent de supposer que f admet un DL à l'ordre 1 en a : $f \underset{a}{=} f(a) + \lambda(x-a) + o(x-a)$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et on a alors $\lambda = f'(a)$.
2. *Si f est dérivable en tout point de I, on dit que f est dérivable sur I. L'application $x \mapsto f'(x)$ est alors définie sur I et est appelé fonction dérivée de f.*
   On note $\mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions dérivables sur I.

Exemple 1

1. *Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de procédé $x \mapsto x^n$. Soit $a \in \mathbb{R}$. Alors f_n est dérivable en a de nombre dérivé na^{n-1}.*
2. ln *est dérivable par définition. Pour* exp, *voir la suite du chapitre.*
3. sin *est dérivable en tout $a \in \mathbb{R}$ et* $\sin'(a) = \cos(a)$.

Exemple 2

La fonction $|.|$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ mais pas dérivable en 0.

En effet sur $\mathbb{R}^*_-$ et $\mathbb{R}^*_+$ cette fonction est respectivement $-Id$ et Id, fonctions dont nous venons de prouver la dérivabilité. Mais $\lim_{0^-} \frac{|x|-x}{x-0} = -1$ et $\lim_{0^+} \frac{|x|}{x} = 1$. Ainsi ce rapport n'a pas de limite en 0 et donc $|.|$ n'est pas dérivable en 0.

Théorème 1

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. SI f est dérivable en a ALORS f est continue en a.

Preuve.

En effet, si f admet un $DL_1(a)$ alors f admet un $DL_0(a)$. ■

Remarque

On a pas du tout de réciproque à ce théorème. Par exemple, la fonction $|.|$ est continue mais non dérivable en 0. Il existe même des fonctions continue sur $\mathbb{R}$ et nulle part dérivable !

Définition 2

On définit comme d'habitude les ensembles $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$ par

1. *$\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions continue de I dans $\mathbb{R}$.*
2. *Pour $k \in \mathbb{N}$ on a $f \in \mathcal{C}^{k+1}(I, \mathbb{R}) \iff f$ est dérivable et $f' \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$.*

On pose également $\mathcal{D}^k(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions k fois dérivables de I dans $\mathbb{R}$. On note $f^{(k)}$ la dérivée kième de f.

Si $f \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ on dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ ou encore $f \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$.

Remarque

Etre k fois dérivable est différent d'être de classe $\mathcal{C}^k$. On a $f \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}) \Rightarrow f \in \mathcal{D}^k(I, \mathbb{R})$, c'est à dire que $\mathcal{C}^k \subset \mathcal{D}^k$.

D'une manière générale

$$\mathcal{C}^\infty \subset \mathcal{C}^k \subset \mathcal{D}^k \subset \mathcal{C}^{k-1} \subset \cdots \subset \mathcal{D} \subset \mathcal{C}$$

Ces inclusions sont strictes. Par exemple $x \mapsto x^2 \sin(\frac{1}{x})$ est dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, mais sa dérivée n'a pas de limite en 0 et donc n'est pas continue en 0.

I.2 Tangentes

Explication Le rapport qui admet une limite quand f est dérivable est la pente de la droite passant par $(a, f(a))$ et $(x, f(x))$.

Définition 3

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$.

1. *Si f est dérivable en a, alors la droite d'équation $y = f(a) + f'(a)(x-a)$ est appelé tangente à f en a.*
2. *Si $\lim\limits_{a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \pm\infty$ alors la droite d'équation $x = a$ est appelée tangente à f en a.*

Explication On a $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o_a(x-a)$ quand f est dérivable. Ceci signifie que la droite $y = f(a) + f'(a)(x-a)$ est la "meilleure" approximation affine de f au voisinage de a. C'est la droite qui ressemble le plus à la courbe de f à cet endroit. L'unicité des coefficients d'un développement limité assure l'unicité d'une telle droite.

Définition 4

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. On considère, pour $x \in I$ et $x \neq a$ le rapport $\tau_a(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

1. *Si τ_a admet une limite à gauche en a, alors on la note $f'_g(a)$ (nombre dérivé à gauche) et on dit que f est dérivable à gauche. La demi-droite $y = f(a) + f'_g(a)(x-a)$ et $x \leqslant a$ est appelée demi-tangente à gauche de f en a.*

2. *Si $\tan_a$ admet une limite à droite en a, alors on la note $f'_d(a)$ (nombre dérivé à droite) et on dit que f est dérivable à droite. La demi-droite $y = f(a) + f'_d(a)(x-a)$ et $x \geqslant a$ est appelée demi-tangente à gauche de f en a.*

Remarque

La dérivabilité à gauche (resp. à droite) implique la continuité à gauche (resp. à droite).

Proposition 1
Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathring{I}$.

Alors f est dérivable en a ssi f est dérivable à gauche et à droite en a et $f'_d(a) = f'_g(a)$.

I.3 Opérations sur les dérivés

Théorème 2
Soient $f, gI \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. On suppose f, g dérivables en a.

1. *$f + g$ est dérivable en a et $(f+g)'(a) = f'(a) + f'(a)$.*
2. *fg est dérivable en a et $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.*
3. *Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ la fonction λf est dérivable en a et $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$.*
4. *Si $g(a) \neq 0$ alors $\frac{f}{g}$ est dérivable en a et $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{g(a)^2}$.*

On en déduit immédiatement que l'on peut remplacer dérivable en a par dérivable sur I (le dernier point devenant $\frac{f}{g}$ est dérivable en tous les points où g ne s'annule pas).

Remarque

Une somme de fonctions dérivables est encore dérivable. La preuve est une récurrence classique où l'initialisation importante est le cas $n = 2$.

Corollaire 1
Pour tout $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ $\mathcal{D}^n(I, \mathbb{R})$, si $f, g \in \mathcal{D}^n(I, \mathbb{R})$ alors

$$(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)},\ (\lambda f)^{(n)} = \lambda f^{(n)} \text{ et } (fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} (\text{ formule de Leibniz}).$$

Le quotient de deux fonctions $\mathcal{D}^n$ dont le dénominateur ne n'annule pas sur I est encore $\mathcal{D}^n$.

Remarque

Vu que l'on dispose d'un théorème similaire pour les fonctions continues, ces résultats sont encore vrais pour $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$.

Proposition 2
Soient $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$.

1. *Soit $a \in I$. Si f est dérivable en a et si g est dérivable en $f(a)$ alors $g \circ f$ est dérivable en a de nombre dérivé $f'(a)g'(f(a))$.*
2. *Si f est dérivable sur I et g est dérivable sur J alors $g \circ f$ est dérivable sur I de fonction dérivée $f' \times g' \circ f$.*

En pratique

On exhibera clairement l'intervalle image de f et on montrera que g est dérivable sur cet intervalle pour appliquer ce théorème.

Exemple 3
Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $u \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R}_+^*)$. Montrer que les fonctions u^α et $\ln \circ u$ sont dérivables et calculer leurs dérivées.

Corollaire 2
Soit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, I, J des intervalles.

Soient $f \in \mathcal{C}^k(I, J)$ et $g \in \mathcal{C}^k(J, \mathbb{R})$. Alors $g \circ f \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$.

Exemple 4
Calculer l'ensemble sur lequel $\sqrt{.} \circ \cos$ est dérivable. Même question avec $\arcsin \circ \ln$

Exemple 5
La fonction $f_\alpha : x \mapsto x^\alpha$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$. On a déjà calculé sa dérivée n-ième pour établir son $DL_n(0)$.

Théorème 3 (Bijection réciproque)
Soit $f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ bijective de I sur $f(I)$ (c'est à dire que f est injective, ou encore strictement monotone car f est continue) et telle que f' ne s'annule pas sur I. Alors f^{-1} est dérivable sur $f(I)$ et

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

Corollaire 3
Soit $f \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$ injective et telle que f' ne s'annule pas sur I. Alors $f^{-1} \in \mathcal{C}^k(f(I), I)$. Le résultat est encore vrai pour $k = +\infty$

II Fonctions dérivables

II.1 Rolle et accroissements finis

Définition 5 (Extremum local)
Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$.

1. *On dit que f admet un maximum local en a si f est majoré par $f(a)$ au voisinage de a (il existe un intervalle centré en a tel que f est majoré par $f(a)$ sur cet intervalle).*
2. *On dit que f admet un minimum local en a si f est minoré par $f(a)$ au voisinage de a.*

Théorème 4
Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathring{I}$. Si f est dérivable en a et admet un extremum local en a alors $f'(a) = 0$.

Théorème 5 (Théorème de Rolle)
Soit $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, dérivable sur $]a, b[$ et telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Théorème 6 (Théorème des accroissements finis)
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Théorème 7 (Inégalité des accroissements finis)
Soit $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ dérivable sur $]a, b[$.

1. *S'il existe $m, M \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in]a, b[\ m \leqslant f'(x) \leqslant M$ alors $m(b - a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b - a)$.*
2. *Si $|f'|$ est majorée sur $[a, b]$ par $K \in \mathbb{R}^+$ alors $|f(b) - f(a)| \leqslant K|b - a|$.*

II.2 Prolongement $\mathcal{C}^1$

Théorème 8
Soit $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ et est dérivable sur $]a, b]$.

1. *Si $\lim\limits_{a^+} f'$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$ alors $\lim\limits_{a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ aussi et ces limites sont égales.*
2. *En particulier, si $f \in \mathcal{C}^1(]a, b], \mathbb{R})$ et si f' admet une limite finie à droite en a alors f est dérivable en a, f' est continue en a et donc $f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$.*
3. *Si $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ et est dérivable partout sauf en $x_0 \in]a, b[$, et si en plus f' admet des limites à gauche et à droite égale en x_0, alors f est dérivable en x_0 et f' y est continue.*

II.3 Lien avec la monotonie

Théorème 9
Soit $f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$. Alors f est constante ssi $f' = 0$. (La dérivabilité à l'intérieur de I suffit)

Théorème 10
Soit $f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$.

1. *$f' \geqslant 0$ ssi f est croissante sur I et $f' \leqslant 0$ ssi f est décroissante.*
2. *f est strictement croissante (resp. décroissante) ssi f' est positive (resp. négative) ou nulle sur I et $Z = \{x \in I |\ f'(x) = 0\}$ ne contient pas d'intervalle non vide et non réduit à un point (on dit : est d'intérieur vide).*

En particulier, si $f' > 0$, alors f est strictement croissante.

III Applications

III.1 Taylor, encore

Lemme 1
Soit $f \in D(I, \mathbb{R})$ et $a \in I$. Si $f'(x) = o_a((x - a)^n)$ alors $f(x) - f(a) = o_a((x - a)^{n+1})$.

Proposition 3 (Primitivation des développements limités)
Soient $f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R}), a \in I, n \in \mathbb{N}$. Si f' possède un DL(a, n) ie. $f'(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k(x - a)^k + o_a((x - a)^n)$ alors f admet un DL$(a, n+1)$ et $f(x) = f(a) + \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1}(x - a)^{k+1} + o_a((x - a)^{n+1})$.

Théorème 11 (Formule de Taylor-Youg)
Soient $n, \in \mathbb{N}, f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ et $a \in I$. Alors f possède un développement limité à l'ordre n au voisinage de $a$donné par $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k + o_a((x - a)^n)$.

III.2 Suites récurrentes