Dérivation

Antoine Louatron

Table des matières

Notations Comme d'habitude, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

I Dérivabilité

I.1 Définitions

I.1.1 Définition

1. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. On dit que f est dérivable en a si $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie.*

   Dans ce cas on note $f'(a)$ cette limite, et on l'appelle nombre dérivé de f en a. On la note parfois $\frac{f}{x}(a)$ (quand la variable de f est notée x.)

   Il est équivalent de supposer que f admet un DL à l'ordre 1 en a : $f \underset{a}{=} f(a) + \lambda(x-a) + o(x-a)$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et on a alors $\lambda = f'(a)$.
2. *Si f est dérivable en tout point de I, on dit que f est dérivable sur I. L'application $x \mapsto f'(x)$ est alors définie sur I et est appelé fonction dérivée de f.*

   On note $\mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions dérivables sur I.

I.1.2 M-Remarque

On fera bien attention à ne pas montrer la dérivabilité d'une fonction en utilisant la formule de Taylor-Young qui requiert cette même dérivabilité pour être appliquée...

I.1.3 Exemple

1. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de procédé $x \mapsto x^n$. Soit $a \in \mathbb{R}$. Alors f_n est dérivable en a de nombre dérivé na^{n-1}.

   En effet on a pour $x \neq a$ l'égalité $x^n - a^n = (x-a)\sum\limits_{k=0}^{n-1} x^k a^{n-1-k}$. Ainsi
$$\frac{x^n - a^n}{x-a} = \sum_{k=0}^{n-1} x^k a^{n-1-k} \underset{a}{\to} \sum_{k=0}^{n-1} a^k a^{n-1-k} = na^{n-1}.$$
2. $\ln$ est dérivable par définition. Pour $\exp$, voir la suite du chapitre.
3. Dans le chapitre sur la continuité, on a montré que $\sin$ est dérivable en 0 en montrant que $\frac{\sin(x)}{x} \underset{0}{\to} 1$. Pour $a \in \mathbb{R}$ et $x \neq a$, remarquons que $\sin(x) - \sin(a) = 2\sin(\frac{x-a}{2})\cos(\frac{x+a}{2}) \underset{x\to a}{\sim} 2 \times \frac{x-a}{2}\cos(\frac{x+a}{2})$ (Trouver ici l'abus commis, qui n'a pas d'incidence sur le reste de la preuve). On obtient ainsi, par continuité de $\cos$ en a, $\frac{\sin(x)-\sin(a)}{x-a} \underset{x\to a}{\to} \cos(a)$.

I.1.4 Exemple

La fonction $|.|$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ mais pas dérivable en 0.

En effet sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$ cette fonction est respectivement $-Id$ et Id, fonctions dont nous venons de prouver la dérivabilité. Mais $\lim_{0^-} \frac{|x|-x}{x-0} = -1$ et $\lim_{0^+} \frac{|x|}{x} = 1$. Ainsi ce rapport n'a pas de limite en 0 et donc $|.|$ n'est pas dérivable en 0.

I.1.5 Théorème

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. SI f est dérivable en a ALORS f est continue en a.

Preuve.

En effet, si f admet un $DL_1(a)$ alors f admet un $DL_0(a)$. ∎

I.1.6 Remarque

On a pas du tout de réciproque à ce théorème. Par exemple, la fonction $|.|$ est continue mais non dérivable en 0. Il existe même des fonctions continue sur $\mathbb{R}$ et nulle part dérivable !

I.1.7 Définition

On définit comme d'habitude les ensembles $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$ par

1. *$\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions continue de I dans $\mathbb{R}$.*
2. *Pour $k \in \mathbb{N}$ on a $f \in \mathcal{C}^{k+1}(I, \mathbb{R}) \iff f$ est dérivable et $f' \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$.*

On pose également $\mathcal{D}^k(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions k fois dérivables de I dans $\mathbb{R}$. On note $f^{(k)}$ la dérivée kième de f.

Si $f \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ on dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ ou encore $f \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$.

I.1.8 Remarque

Etre k fois dérivable est différent d'être de classe $\mathcal{C}^k$. On a $f \in \mathcal{C}^k(I,\mathbb{R}) \Rightarrow f \in \mathcal{D}^k(I,\mathbb{R})$, c'est à dire que $\mathcal{C}^k \subset \mathcal{D}^k$. D'une manière générale

$$\mathcal{C}^\infty \subset \mathcal{C}^k \subset \mathcal{D}^k \subset \mathcal{C}^{k-1} \subset \cdots \subset \mathcal{D} \subset \mathcal{C}$$

Ces inclusions sont strictes. Par exemple $x \mapsto x^2 \sin(\frac{1}{x})$ est dans $\mathcal{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, mais sa dérivée n'a pas de limite en 0 et donc n'est pas continue en 0.

I.2 Tangentes

Explication Le rapport qui admet une limite quand f est dérivable est la pente de la droite passant par $(a, f(a))$ et $(x, f(x))$.

I.2.1 Définition
Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$.

1. *Si f est dérivable en a, alors la droite d'équation $y = f(a) + f'(a)(x-a)$ est appelé tangente à f en a.*
2. *Si $\lim\limits_{a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \pm\infty$ alors la droite d'équation $x = a$ est appelée tangente à f en a.*

Explication On a $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o_a(x-a)$ quand f est dérivable. Ceci signifie que la droite $y = f(a)+f'(a)(x-a)$ est la "meilleure" approximation affine de f au voisinage de a. C'est la droite qui ressemble le plus à la courbe de f à cet endroit. L'unicité des coefficients d'un développement limité assure l'unicité d'une telle droite.

I.2.2 Définition
Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. On considère, pour $x \in I$ et $x \neq a$ le rapport $\tau_a(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

1. *Si τ_a admet une limite à gauche en a, alors on la note $f'_g(a)$ (nombre dérivé à gauche) et on dit que f est dérivable à gauche. La demi-droite $y = f(a) + f'_g(x-a)$ et $x \leqslant a$ est appelée demi-tangente à gauche de f en a.*
2. *Si $\tan_a$ admet une limite à droite en a, alors on la note $f'_d(a)$ (nombre dérivé à droite) et on dit que f est dérivable à droite. La demi-droite $y = f(a) + f'_d(x-a)$ et $x \geqslant a$ est appelée demi-tangente à gauche de f en a.*

I.2.3 Remarque

La dérivabilité à gauche (resp. à droite) implique la continuité à gauche (resp. à droite).

I.2.4 Proposition
Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathring{I}$.
Alors f est dérivable en a ssi f est dérivable à gauche et à droite en a et $f'_d(a) = f'_g(a)$.

Preuve.
C'est une simple application d'un théorème sur les limites. Cf. le cours sur les fonctions. ■

I.3 Opérations sur les dérivés

I.3.1 Théorème
Soient $f, gI \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. On suppose f, g dérivables en a.

1. *$f+g$ est dérivable en a et $(f+g)'(a) = f'(a) + f'(a)$.*
2. *fg est dérivable en a et $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.*
3. *Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ la fonction λf est dérivable en a et $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$.*
4. *Si $g(a) \neq 0$ alors $\frac{f}{g}$ est dérivable en a et $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{g(a)^2}$.*

On en déduit immédiatement que l'on peut remplacer dérivable en a par dérivable sur I (le dernier point devenant $\frac{f}{g}$ est dérivable en tous les points où g ne s'annule pas).

Preuve.
On a comme hypothèse $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o_a(x-a)$ et $g(x) = g(a) + g'(a)(x-a) + o_a(x-a)$.

1. Alors $f(x)+g(x)=(f(a)+g(a))+(f'(a)+g'(a))(x-a)+o_a(x-a)$.
2. $fg(x)=(f(a)+f'(a)(x-a))(g(a)+g'(a)(x-a))+o_a(x-a)=f(a)g(a)+(f'(a)g(a)+f(a)g'(a))(x-a)+o_a(x-a)$.
3. La dérivée d'une fonction constante est nulle.
4. On va montrer que si $g(a)\neq 0$ alors $\frac{1}{g}$ est dérivable en a de nombre dérivé $\frac{-g(a)}{g(a)^2}$. Il suffira alors d'utiliser le point 2 pour conclure.

$$\frac{1}{g(x)}=\frac{1}{g(a)\left(1+\frac{g'(a)}{g(a)}(x-a)+o_a(x-a)\right)}=\frac{1}{g(a)}(1-\frac{g'(a)}{g(a)}(x-a)+o_a(x-a)).$$

CQFD. ■

I.3.2 Corollaire
Pour tout $n\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$ $\mathcal{D}^n(I,\mathbb{R})$, si $f,g\in\mathcal{D}^n(I,\mathbb{R})$ alors

$$(f+g)^{(n)}=f^{(n)}+g^{(n)},\ (\lambda f)^{(n)}=\lambda f^{(n)} \text{ et } (fg)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}g^{(n-k)}(\text{ formule de Leibniz}).$$

Le quotient de deux fonctions $\mathcal{D}^n$ dont le dénominateur ne n'annule pas sur I est encore $\mathcal{D}^n$.

Preuve.
On montre seulement la formule de Leibniz et le caractère $\mathcal{D}^n$ du quotient.

1. On a déjà f,g dérivables $\Rightarrow fg$ l'est et $(fg)'=f'g+g'f$.
2. Soit $n\in\mathbb{N}$ fixé. Supposons maintenant que le produit de deux fonctions $\mathcal{D}^n$ est $\mathcal{D}^n$ et que sa dérivée est donnée par la formule de Leibniz.
   Soient $f,g\in D^{n+1}(I,\mathbb{R})$. Alors en particulier, ces fonctions sont $\mathcal{D}^n$ (et même $\mathcal{C}^n$, au passage) et on a $(fg)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}g^{(n-k)}$. Or pour tout $k\in[\![0,n]\!]$ les fonctions $f^{(k)}$ et $g^{(n-k)}$ sont dérivables (car $k<n+1$ et $n-k<n+1$) donc leur produit l'est et la somme de ces produits l'est encore (par le point 1). Ainsi $(fg)^{(n)}$ est dérivable et donc fg est $n+1$ fois dérivable et

$$\begin{aligned}(fg)^{(n+1)}&=\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}g^{(n-k)}\right)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(f^{(k)}g^{(n-k)})'\\&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k+1)}g^{(n-k)}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}g^{(n-k+1)}\\&=f^{(n+1)}+\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}f^{(k+1)}g^{(n-k)}+g^{(n+1)}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}g^{(n-k+1)}\\&=f^{(n+1)}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}f^{(k)}g^{(n-(k-1))}+g^{(n+1)}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}g^{(n-k+1)}\\&=g^{(n+1)}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}f^{(k)}g^{(n+1-k)}+f^{(n+1)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}f^{(k)}g^{(n+1-k)}\end{aligned}$$

   Finalement, par récurrence on a montré ce que l'on voulait.
3. Supposons $f,g\in\mathcal{D}^n(I,\mathbb{R})$ avec $n>1$ et g ne s'annule pas sur I. Alors $\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-fg'}{g^2}$. Comme $f',g,g',f\in\mathcal{D}^{(n-1)}(I,\mathbb{R})$ la somme de produits $f'g-fg'$ est aussi $n-1$ fois dérivable, tout comme g^2. La propriété est donc héréditaire et initialisé par le théorème précédent, et donc est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$. ■

I.3.3 Remarque

Vu que l'on dispose d'un théorème similaire pour les fonctions continues, ces résultats sont encore vrais pour $\mathcal{C}^k(I,\mathbb{R})$.

I.3.4 Proposition
Soient $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$.

1. *Soit $a \in I$. Si f est dérivable en a et si g est dérivable en $f(a)$ alors $g \circ f$ est dérivable en a de nombre dérivé $f'(a)g'(f(a))$.*
2. *Si f est dérivable sur I et g est dérivable sur J alors $g \circ f$ est dérivable sur I de fonction dérivée $f' \times g' \circ f$.*

Preuve.
On peut raisonner comme d'habitude via les DL. On pose $b = f(a)$

On sait que $g(y) - g(b) \underset{b}{=} g'(b)(y-b) + o(y-b)$ et $f(x) - f(a) \underset{a}{=} f'(a)(x-a) + o(x-a)$. On pose $y = f(x)$ dans le premier DL, ce qui est possible car $f \underset{a}{\to} b$ (f étant dérivable, elle est continue en a). On obtient

$$g(f(x)) - g(f(a)) \underset{a}{=} g'(f(a))(f(x) - f(a)) + o(f(x) - f(a)) \underset{a}{=} f'(a)g'(f(a))(x-a) + o(x-a)$$

CQFD. ∎

I.3.5 En pratique

On exhibera clairement l'intervalle image de f et on montrera que g est dérivable sur cet intervalle pour appliquer ce théorème.

I.3.6 Exemple
Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $u \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R}_+^*)$. Montrer que les fonctions u^α et $\ln \circ u$ sont dérivables et calculer leurs dérivées.

I.3.7 Corollaire
Soit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, I, J des intervalles.

Soient $f \in \mathcal{C}^k(I, J)$ et $g \in \mathcal{C}^k(J, \mathbb{R})$. Alors $g \circ f \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$.

Preuve.
C'est immédiat par récurrence en utilisant le fait que $(g \circ f)' = f' \times g' \circ f$. ∎

I.3.8 Exemple
Calculer l'ensemble sur lequel $\sqrt{.} \circ \cos$ est dérivable. Même question avec $\arcsin \circ \ln$

I.3.9 Exemple
La fonction $f_\alpha : x \mapsto x^\alpha$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$. On a déjà calculé sa dérivée n-ième pour établir son $DL_n(0)$.

I.4 Bijection réciproque

I.4.1 Théorème (Bijection réciproque)
Soit $f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ bijective de I sur $f(I)$ (c'est à dire que f est injective, ou encore strictement monotone car f est continue) et telle que f' ne s'annule pas sur I. Alors f^{-1} est dérivable sur $f(I)$ et

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

Preuve.
On sait déjà que f^{-1} est continue sur $f(I)$ car f est continue sur I.

Soit $b \in f(I)$. Montrons que f^{-1} est dérivable en b. On doit calculer la limite du rapport $\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y-b}$. On pose $x = f^{-1}(y)$ et $a = f^{-1}(b)$. Comme f^{-1} est continue en b on a alors $x \underset{y \to b}{\to} a$. La limite étudiée devient donc celle de $\frac{x-a}{f(x)-f(a)}$ quand $x \to a$. Mais par hypothèse cette limite existe et vaut $\frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$. ∎

I.4.2 Mnémotechnie

La formule $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$ peut se retrouver très facilement en dérivant $Id = f \circ f^{-1}$. Il suffit pour pouvoir isoler $(f^{-1})'$ que $f' \circ f^{-1}$ ne s'annule pas.

I.4.3 Exercice
Déduire la dérivée de $\ln$ *de* $\exp' = \exp$. *Déduire la dérivée de* $\arccos$, $arctan$.

I.4.4 Corollaire
Soit $f \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$ *injective et telle que* f' *ne s'annule pas sur I. Alors* $f^{-1} \in \mathcal{C}^k(f(I), I)$. *Le résultat est encore vrai pour* $k = +\infty$

Preuve.
Encore une fois par récurrence. ■

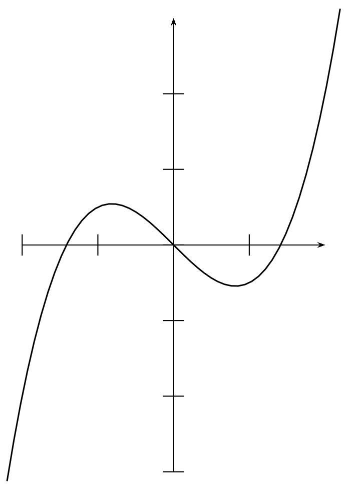
II Fonctions dérivables

II.1 Rolle et accroissements finis

II.1.1 Définition (Extremum local)
Soient $f : I \to \mathbb{R}$ *et* $a \in I$.

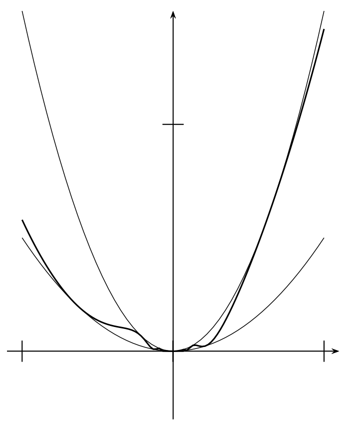
1. *On dit que* f *admet un maximum local en* a *si* f *est majoré par* $f(a)$ *au voisinage de* a *(il existe un intervalle centré en* a *tel que* f *est majoré par* $f(a)$ *sur cet intervalle).*
2. *On dit que* f *admet un minimum local en* a *si* f *est minoré par* $f(a)$ *au voisinage de* a.

II.1.2 Exemple
Voici un exemple de fonction admettant un maximum local, un minimum local, mais pas de d'extremum global.



II.1.3 ATTENTION

Une fonction n'est pas forcément monotone au voisinage d'un extremum local. Ex : $x \mapsto 2x^2 + x^2 \sin \frac{1}{x}$.



II.1.4 Théorème
Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathring{I}$. Si f est dérivable en a et admet un extremum local en a alors $f'(a) = 0$.

Preuve.
On suppose que f admet un maximum local en a. Soit $x \in I$ et $x < a$ (c'est possible car a n'est pas une borne). Alors $x - a < 0$ et $f(x) - f(a) \leqslant 0$. Par passage à la limite des inégalités (on sait que f est dérivable, donc dérivable à gauche) on en déduit que $f'_g(a) \geqslant 0$.

Soit maintenant $x \in I$ et $x > a$. On a toujours $f(x) \leqslant f(a)$ mais maintenant $x - a > 0$. Ainsi par passage à la limite des inégalités on a $f'_d(a) \leqslant 0$.

Comme f est dérivable, ces deux nombres dérivés sont égaux et donc $f'(a) = 0$. ∎

II.1.5 Remarque

1. Le point a est à l'intérieur de I et c'est fondamental. Le théorème devient faux si on enlève cette condition.
2. La réciproque de ce théorème est clairement fausse. Ex $x \mapsto x^3$.

II.1.6 Théorème (Théorème de Rolle)
Soit $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, dérivable sur $]a, b[$ et telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Preuve.
f étant continue sur un segment elle atteint ses bornes. On suppose que f n'est pas constante (sinon tout $c \in]a, b[$ convient) et on note $m = \inf_{[a,b]} f$ et $M = \sup_{[a,b]} f$. Comme f n'est pas constante, on est dans un des deux cas suivants

— $f(a) = f(b) \neq M$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = M$. Comme M est un maximum de f et que c est à l'intérieur de $[a, b]$ on peut utiliser le théorème précédent qui prouve que $f'(c) = 0$.

— $f(a) = f(b) \neq m$. On procède de la même manière avec $f(c) = m$. ∎

II.1.7 Remarque

1. Toutes les hypothèses sont importantes. On ne peut pas se priver de la dérivabilité ne serait-ce qu'en un point de $]a, b[$, ni de la continuité (même aux bornes), ni de $f(a) = f(b)$!
2. Il n'y a nulle part affirmation d'une unicité !

II.1.8 Théorème (Théorème des accroissements finis)
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Preuve.
On définit une nouvelle fonction $\varphi : \left\{ \begin{array}{rcl} [a, b] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a) - f(a) \end{array} \right.$. φ est dérivable sur $]a, b[$ car f l'est et $x \mapsto \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a) + f(a)$ aussi.

De plus, $\varphi(a) = 0 = \varphi(b)$. On peut donc appliquer le théorème de Rolle à φ, qui nous donne un $c \in]a, b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$. Mais d'après la définition de φ, $\varphi'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Donc $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. CQFD. ∎

II.1.9 Théorème (Inégalité des accroissements finis)
Soit $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ dérivable sur $]a, b[$.

1. *S'il existe $m, M \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in]a, b[$ $m \leqslant f'(x) \leqslant M$ alors $m(b - a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b - a)$.*
2. *Si $|f'|$ est majorée sur $[a, b]$ par $K \in \mathbb{R}^+$ alors $|f(b) - f(a)| \leqslant K|b - a|$.*

Preuve.
D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Comme $m \leqslant f'(c) \leqslant M$ on a $m(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b-a)$.

Le deuxième points est juste l'application du premier avec $M = K$ et $m = -K$. ■

II.1.10 Exemple
Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $|\sin x| \leqslant |x|$.

II.2 Prolongement $\mathcal{C}^1$

II.2.1 Exemple
Montrons que $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\sin x}{x} \end{array} \right.$ et $f(0) = 1$ est $\mathcal{C}^1$.

Explication on peut aller beaucoup plus vite pour ce genre de raisonnement.

II.2.2 Théorème
Soit $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ et est dérivable sur $]a, b]$.

1. *Si $\lim\limits_{a^+} f'$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$ alors $\lim\limits_{a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ aussi et ces limites sont égales.*
2. *En particulier, si $f \in \mathcal{C}^1(]a, b], \mathbb{R})$ et si f' admet une limite finie à droite en a alors f est dérivable en a, f' est continue en a et donc $f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$.*
3. *Si $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ et est dérivable partout sauf en $x_0 \in]a, b[$, et si en plus f' admet des limites à gauche et à droite égale en x_0, alors f est dérivable en x_0 et f' y est continue.*

Preuve.
On note l la limite de f' à droite en a.

1. Si $l \in \mathbb{R}$. Montrons que f est dérivable en a.
   Soit $\varepsilon > 0$. Soit également $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in I \cap]a, a + \alpha]$ $|f'(x) - l| \leqslant \varepsilon$.
   Si maintenant $x \in]a, a + \alpha]$, alors on peut appliquer le théorème des accroissements finis à f sur $[a, x]$ car f y est continue et elle est dérivable sur $]a, x[$. Il existe donc $c \in]a, x[$ tel que $f'(c) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. Mais $c \in]a, a + \alpha[$ donc
   $$\left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - l \right| = |f'(c) - l| \leqslant \varepsilon.$$
   Ceci prouve que le taux d'accroissement de f admet une limite en a^+ et que cette limite est l (le même α que pour f' convient).
2. Si maintenant $l = +\infty$.
   Soit $A \in \mathbb{R}^+$. Soit également $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in [a, b] \cap]a, a + \alpha]$ $f'(x) \geqslant A$.
   Soit $x \in]a, a + \alpha]$. Le théorème des accroissements finis nous permet d'affirmer qu'il existe $c \in]a, x[$ tel que $A \leqslant f'(c) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. Ainsi $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \underset{a^+}{\to} +\infty$.
3. Si $l = -\infty$ on fait le même raisonnement. ■

II.2.3 Exemple
On peut maintenant prouver que $\sqrt{.}$ n'est pas dérivable en 0 comme vous aimez le faire. En effet, $\sqrt{.}$ est continue sur $[0, 1]$ et dérivable sur $]0, 1]$ de dérivée $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Comme la limite de la dérivée est $+\infty$, le taux d'accroissement admet une limite $+\infty$ et donc $\sqrt{.}$ n'est pas dérivable en 0.

II.2.4 M Remarque

1. Attention il n'y a pas de réciproque à la deuxième partie de ce théorème. La dérivabilité sur $[a, b]$ n'implique pas que $\lim\limits_{a^+} f'$ existe.
   Ex : $f : x \mapsto x^2 \sin \frac{1}{x}$ prolongée par continuité en 0 ($f(0) = 0$). Alors f est dérivable en 0, mais $f' : x \mapsto 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0 !
2. On peut bien sûr adapter la démonstration au cas où f est dérivable sur $[a, b[$ et continue sur $[a, b]$. On ne peut pas enlever l'hypothèse de continuité aux bornes.

II.3 Lien avec la monotonie

II.3.1 Théorème
Soit $f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$. Alors f est constante ssi $f' = 0$. (La dérivabilité à l'intérieur de I suffit)

Preuve.
Si f est constante, ses taux de variations sont identiquement nuls, donc sa dérivée existe et est nulle .

Réciproquement si $f' = 0$, soient $a < b \in I$. Alors $f(a) - f(b) = (b - a)f'(c) = 0$ pour un $c \in]a, b[$ d'après le théorème des accroissements finis. Alors $f(b) = f(a)$ et f est donc constante. ∎

II.3.2 Remarque

Le fait que I soit un intervalle est fondamental. Etudier $x \mapsto \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$. Sa dérivée est 0 donc cette fonction est constante sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$. Par contre, elle vaut $-\frac{\pi}{2}$ sur ce premier intervalle et $+\frac{\pi}{2}$ sur le second.

II.3.3 Théorème
Soit $f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$.

1. *$f' \geqslant 0$ ssi f est croissante sur I et $f' \leqslant 0$ ssi f est décroissante.*
2. *f est strictement croissante (resp. décroissante) ssi f' est positive (resp. négative) ou nulle sur I et $Z = \{x \in I |\ f'(x) = 0\}$ ne contient pas d'intervalle non vide et non réduit à un point (on dit : est d'intérieur vide).*

En particulier, si $f' > 0$, alors f est strictement croissante.

Preuve.
On fait les preuves dans le cas f croissante. L'autre cas se traite en renversant les inégalités.

1. On suppose f croissante, et soient $a, x \in I$ distincts. Alors $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geqslant 0$ car f conserve les inégalités. Par passage à la limite des inégalités $f'(a) \geqslant 0$.
   Réciproquement, si $f' \geqslant 0$, soient $a, x \in I$ distincts. Comme f est continue et dérivable sur $[a, x]$ on peut lui appliquer le TAF : il existe $c \in]a, x[$ tel que
   $$f(x) - f(a) = f'(c)(x - a)$$
   Donc $f(x) - f(a)$ est du signe de $x - a$ et f conserve les inégalités (ie est croissante.)
2. On pose $Z = \{x \in I |\ f'(x) = 0\}$ et on se place dans le cas $f' \geqslant 0$, c'est à dire f croissante.
   On suppose que Z contient un intervalle $[a, b] \in I$ avec $a < b$. D'après le théorème II.4.1 f est constante sur l'intervalle $[a, b]$ et donc $f(a) = f(b)$. Ainsi f n'est pas strictement croissante.
   Réciproquement, on suppose que Z ne contient aucun intervalle d'intérieur non vide. Soient $a < b \in I$. On a déjà $f(a) \leqslant f(b)$. Si on a $f(a) = f(b)$ alors f est constante (car elle y est croissante) sur $[a, b]$ donc sa dérivée y est nulle et $[a, b] \subset I$. Contradiction. ∎

II.3.4 Remarque

Ce n'est pas parce que $f'(a) > 0$ que f est strictement croissante au voisinage de a, ni même monotone. Ce cas apparaît forcément en un point où la dérivée n'est pas continue.

II.3.5 Exemple
$x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ même si sa dérivée s'annule.

III Applications

III.1 Taylor, encore

III.1.1 Lemme
Soit $f \in D(I, \mathbb{R})$ et $a \in I$. Si $f'(x) \underset{a}{=} o((x-a)^n)$ alors $f(x) - f(a) \underset{a}{=} o((x-a)^{n+1})$.

Preuve.
On suppose $f'(x) \underset{a}{=} o((x-a)^n)$ ou encore $\frac{f'(x)}{(x-a)^n} \underset{a}{\to} 0$.

Montrons que $\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^{n+1}} \underset{a}{\to} 0$.

Soit $\varepsilon > 0$ et $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in I\ |x-a| < \alpha \Rightarrow \left|\frac{f'(x)}{(x-a)^n}\right| < \varepsilon$.

Soit $x \in]a-\alpha, a+\alpha[\cap I$. On applique le TAF sur $[a,x]$ ou $[x,a]$. On obtient $|f(x)-f(a)| = |f'(c)||x-a|$ pour un certain $c \in [a,x]$ ou $[x,a]$. Dans les deux cas $c \in]a-\alpha, a+\alpha[\cap I$ et donc $\left|\frac{f'(c)}{(c-a)^n}\right| < \varepsilon$ et comme $(x-a)^n \geqslant (c-a)^n$, $\left|\frac{f'(c)}{(x-a)^n}\right| < \varepsilon$ ou encore $|f'(c)| < \varepsilon |x-a|^n$.

Finalement $|f(x)-f(a)| < \varepsilon |x-a|^{n+1}$ et on a bien $\left|\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^{n+1}}\right| < \varepsilon$. CQFD. ■

III.1.2 Proposition (Primitivation des développements limités)
Soient $f \in \mathcal{D}(I,\mathbb{R}), a \in I, n \in \mathbb{N}$. Si f' possède un DL(a,n) ie. $f' \underset{a}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k + o((x-a)^n)$ alors f admet un DL$(a,n+1)$ et

$$f(x) \underset{a}{=} f(a) + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1}(x-a)^{k+1} + o((x-a)^{n+1}).$$

Preuve.
Appliquer le lemme précédent à $g : x \mapsto f(x) - f(a) - \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1}(x-a)^{k+1}$. ■

III.1.3 Théorème (Formule de Taylor-Youg)
Soient $n, \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{C}^n(I,\mathbb{R})$ et $a \in I$. Alors f possède un développement limité à l'ordre n au voisinage de a. Précisément :

$$f(x) \underset{a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n).$$

Preuve.
On raisonne par récurrence. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$P_n : \forall f \in \mathcal{C}^n(I,\mathbb{R})\ f(x) \underset{a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n)$$

— Initialisation : Si $f : I \to \mathbb{R}$ est continue alors on a vu que $f(x) \underset{a}{=} f(a) + o(1)$. C'est la formule de Taylor-Young pour $n = 0$.
— Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que P_n est vraie.
Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I,\mathbb{R})$. Alors $f' \in \mathcal{C}^n(I,\mathbb{R})$ donc $f'(x) \underset{a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n)$ par hypothèse de récurrence.
Mais alors, d'après le théorème III.1.2 on a

$$f(x) \underset{a}{=} f(a) + \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!(k+1)}(x-a)^{k+1} + o((x-a)^{n+1}).$$

C'est le résultat cherché modulo un changement de variable pour ramener l'ensemble d'indice à $[\![1, n+1]\!]$.
— Conclusion : la formule de Taylor-Young est vraie ! ■

III.2 Suites récurrentes

Explication On souhaite étudier plus précisément la convergence des suites de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$. Par exemple dans l'espoir d'approximer numériquement un point fixe de f.

III.2.1 En pratique

(u_n) ne peut converger que vers un point fixe l de f On écrit $|u_{n+1} - l| = |f(u_n) - f(l)| \leqslant k|u_n - l|$ si f on peut appliquer l'IAF. Alors par récurrence $|f(u_n) - l| \leqslant k^n |u_0 - l|$ qui converge si $k < 1$. On obtient une convergence au moins géométrique.

III.2.2 Exemple

On étudie la suite $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{1}{u_n}$.