Fonctions dérivables

M. Louatron

Table des matières

I Dérivabilité

I.1 Applications

I.1.1 Définition

Une fonction (on dit également une application) est la donnée de 3 objets :

1. *Un ensemble de départ*
2. *Un ensemble d'arrivé*
3. *Un procédé qui à chaque élément de l'ensemble de départ associe un élément de l'ensemble d'arrivé.*

On note $f : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \right.$ *la fonction* f *définie sur l'ensemble* E*, à valeurs dans* F *et qui à un* $x \in E$ *associe* $f(x) \in F$*. Si on pose* $y = f(x)$ *pour un* $x \in E$*, on dit que* y *est l'image de* x *par* f *et* x *est un antécédent de* y *par* f*.*

I.1.2 Remarque

Tous les éléments de E doivent avoir une et une seule image. Par contre un élément de F peut avoir, 0, 1 ou plusieurs antécédents. Avec les notations précédentes, on peut donc affirmer que $\forall x \in E \exists! y \in F \; y = f(x)$. **Ajout au chapitre 0**)

I.1.3 Exemple

1. $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & 3t^{12} + 2t - 1 \end{array} \right.$
2. $\sin : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin(x) \end{array} \right.$
3. $\cos : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos(x) \end{array} \right.$
4. $\ln : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(x) \end{array} \right.$
5. $\exp : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & e^x \end{array} \right.$
6. $id : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & x \end{array} \right.$ où E est un ensemble quelconque
7. $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z^2 + 1 \end{array} \right.$. Où s'annule-t-elle ?
8. f qui a un point du plan associe l'unique droite de pente 2 qui passe par ce point.
9. D qui à une fonction dérivable f définie sur $\mathbb{R}$ associe sa fonction dérivée.

I.1.4 Domaine de définition

Calculer les domaines de définition des fonctions $f : x \mapsto \ln(x+1)$, $g : x \mapsto \sqrt{(x+1)(x-2)}$.
Modèle de rédaction :
La fonction f est définie sur l'ensemble $D_f = \{x \in \mathbb{R} | \; x + 1 > 0\}$. Ainsi $D_f =]-1, +\infty[$. **Ajout au chapitre 0**)
La fonction g est définie sur l'ensemble $D_g = \{x \in \mathbb{R} | \; (x+1)(x-2) \geqslant 0\}$. Etudions le signe de cette expression :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$x^2 - x - 2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi g est définie sur $D_g =]-\infty, -1] \cup [2, +\infty[$ **Ajout au chapitre 0**)

I.1.5 Courbe représentative

Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction à variable réelle (ie $E \subset \mathbb{R}$). la courbe représentative de f est l'ENSEMBLE $\{\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} \mid x \in E\} = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x)\}$.

Ainsi la courbe représentative de f est l'ensemble d'équation $y = f(x)$.

I.1.6 Définition

L'image d'une fonction $f : E \to F$ est l'ensemble de ses valeurs. Plus précisément, $\mathrm{Im}(f) = \{y \in F \mid \exists x \in E\ y = f(x)\}$.

*On la note aussi $f(E)$. Plus généralement, l'image par f d'un ensemble $A \subset E$ (**Ajout au chapitre 0**) est $f(A) = \{y \in F \mid \exists a \in A\ y = f(a)\} = \{f(a) \mid a \in A\}$ de manière abusive.*

I.1.7 Exemple

Dessiner $\exp, \ln, \sin$ et calculer leurs images.

I.2 Propriétés des applications

I.2.1 Définition

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ avec $D \subset \mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0, ie. $\forall x \in D\ \ -x \in D$.

1. *on dit que f est paire ssi $\forall x \in D\ f(x) = f(-x)$*
2. *on dit que f est paire ssi $\forall x \in D$ et $f(x) = -f(-x)$*

Dessin Expliquer les conséquences graphiques.

I.2.2 Exemple

cos les fonctions puissances paires sont paires

sin, les fonctions puissances impaires sont impaires.

$\exp, \ln, x \mapsto x + x^2$ ne sont ni paire ni impaire.

I.2.3 Exemple

Soit $f : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. Etudier la parité de f.

I.2.4 Utilisation

Dans le cadre d'une étude de fonction, on étudie au plus tôt la parité pour essayer de réduire la taille du tableau de variations.

I.2.5 Définition

Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que E est un sous ensemble de $\mathbb{R}$. Dans ce cas on dit que f est une fonction à variable réelle.

1. *f est croissante ssi $\forall x, y \in E\ x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$.* ***Ajout au chapitre 0***
2. *f est strictement croissante ssi $\forall x, y \in E\ x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$.*
3. *f est décroissante ssi $\forall x, y \in E\ x \leqslant y \Rightarrow f(x) \geqslant f(y)$.*
4. *f est strictement décroissante ssi $\forall x, y \in E\ x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$.*

I.2.6 Exemple

$\exp, \ln$ sont strictement croissante.

$x \mapsto \frac{1}{x}$ est strictement décroisante sur $\mathbb{R}_+^*$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$.

cos n'est ni croissante ni décroissante, mais cos est strictement décroissante sur $[0, \pi]$.

I.2.7 Opération sur les fonctions

Soient $f, g : E \to \mathbb{C}$ deux fonctions à valeurs réelles ou complexes, définies sur un ensemble quelconque E. On peut définir la somme et le produit de ces fonctions comme suit :

$$f + g : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & f(x) + g(x) \end{array} \right. \quad \text{et } fg : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & f(x)g(x) \end{array} \right.$$

Si de plus f ne s'annule pas on pose $\frac{1}{f} : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \frac{1}{f(x)} \end{array} \right.$ et $\frac{g}{f} = g \times \frac{1}{f}$.

I.2.8 Exemple

$\cos^2$, $\frac{1}{Id}$.

I.3 Formules usuelles

I.3.1 Définition

Soit I un intervalle non vide et non réduit à un point. Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

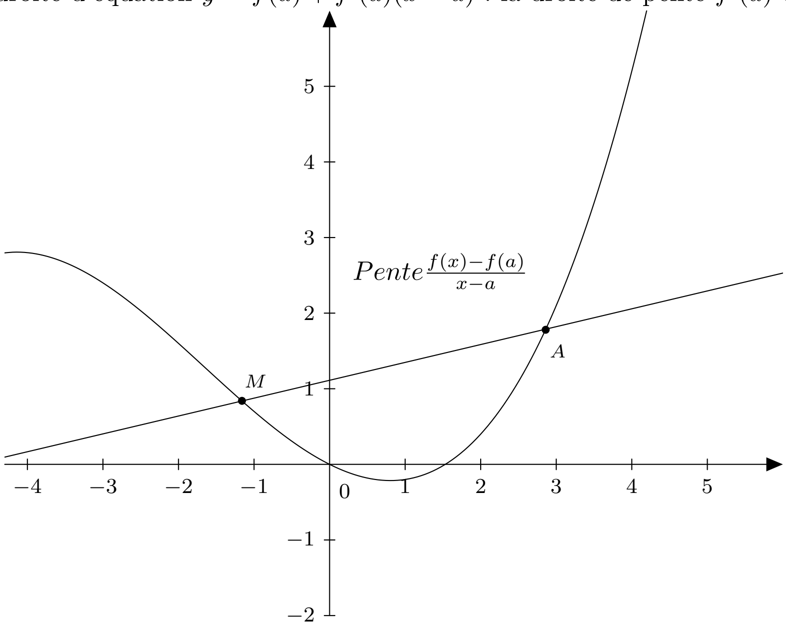
1. *Soit $a \in I$. On dit que f est dérivable en a ssi $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ possède une limite finie quand x tend vers a. On note $f'(a)$ cette limite et c'est la pente de la tangente à la courbe représentive de f.*
2. *On dit que f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout point de I. Dans ce cas on note f' la fonction dérivée $f' : x \mapsto f'(x)$.*

I.3.2 Remarque

On peut également étudier la limite en 0 de $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$. On a en fait posé $h = x - a$.
Par nature, un taux d'accroissement est une limite indéterminée de la forme "$\frac{0}{0}$" (Ne PAS écrire ceci...)

I.3.3 Tangentes

Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ (définie sur un intervalle) est dérivable en a ssi sa courbe représentative admet une tangente en a, qui est la droite d'équation $y = f(a) + f'(a)(x - a)$: la droite de pente $f'(a)$ et qui passe par le point



de coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ f(a) \end{pmatrix}$.

I.3.4 Exemple

Les fonctions polynomiales, $\exp, \ln, \cos, \sin$ sont dérivables sur leurs domaines de définition.
La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^+$ mais dérivable seulement sur $\mathbb{R}_+^*$.
La fonction $x \mapsto |x|$ est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.-

I.3.5 Théorème

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur un intervalle I.

1. *Si f et g sont dérivables sur I alors $f + g$ est dérivable sur I et $(f + g)' = f' + g'$.*
2. *Si f est dérivable sur I et $\lambda \in \mathbb{R}$ est un nombre alors λf est dérivable sur I et $(\lambda f)' = \lambda f'$.*
3. *Si f et g sont dérivables sur I alors fg est dérivable sur I et $(fg)' = f'g + fg'$.*
4. *Si f est dérivable sur I et ne s'annule pas alors $\frac{1}{f}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{1}{f}\right)' = \frac{-f'}{f^2}$.*

I.3.6 Exemple

Montrer la dérivabilité et dériver $f : x \mapsto x \sin(x) e^x$.

I.3.7 Corollaire

Si $f, g : I \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions dérivables et si g ne s'annule pas sur I alors $\frac{f}{g}$ est dérivable sur I et

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

I.3.8 Exemple
Prouver la dérivabilité sur un domaine à préciser et calculer la dérivée de $f : x \mapsto \frac{x\cos x + e^x}{x^2+2x-3}$.

II Composition des fonctions

II.1 Composée et domaine de définition

II.1.1 Définition
Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ où E, F, G sont des ensembles.

La fonction composée de f par g est la fonction $g \circ f \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & G \\ x & \mapsto & g(f(x)) \end{array} \right.$.

II.1.2 Remarque
Il faut voir l'hypothèse cachée dans cette définition : les valeurs de F doivent toutes être dans l'ensemble de définition de g

II.1.3 Exemple
$x \mapsto \sin(x^2)$, $x \mapsto \ln(x^2 - 3x + 2)$, $x \mapsto \sqrt{x + \sqrt{x^2+1}}$.

Ecrire les fonctions qui les composent.

II.1.4 Règle d'étude
Pour étudier une composition, on commence toujours par la fonction la plus à "l'intérieur" Par exemple, calculons le domaine de définition de $\ln(1 - \sqrt{x+1})$.

II.2 Dérivons

II.2.1 Théorème
$f : I \to J$, $g : J \to \mathbb{R}$.

Si f et g sont dérivables alors $g \circ f$ est dérivable sur I et

$$(g \circ f)' = f' \times g' \circ f$$

ou encore $\forall x \in I \ (g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'(f(x))$

II.2.2 Exemple
Dériver $x \mapsto \sin(x^2)$, $x \mapsto x\ln(1+x^2)$.

II.2.3 Proposition
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $u : I \to \mathbb{R}_+^*$. Alors u^α est dérivable et $(u^\alpha)' = \alpha u' u^{\alpha-1}$.

Si $\alpha \in \mathbb{Z}$, alors u peux prendre des valeurs négatives, et même nulle si $\alpha \geqslant 0$.

II.2.4 Exemple
Fonction inverse, $\cos^2$, $x \mapsto \sqrt{x^2+x-2}$, $x \mapsto \frac{1}{2+\cos(x)}$.

II.3 Bijections

II.3.1 Définition
Soit $f : E \to F$ une fonction. Si $\forall y \in F \exists! x \in E \ y = f(x)$ (ie tout élément de l'ensemble d'arrivé possède un unique antécédent par f) on dit que f est une bijection.

II.3.2 Exemple
On calcule l'image grâce au tableau de variations ou à la courbe.

Le faire pour $x \mapsto x^2$, $x \mapsto \exp(x)$.

II.3.3 Bijection réciproque

Soit $f : E \to F$ une bijection. On peut tout à fait créer un procédé qui associé à chaque y dans F son unique antécédent par f.

II.3.4 Définition

Soit $f : E \to F$ une bijection. On définit la bijection réciproque $f^{-1} : F \to E$ de f par $\forall y \in F \forall x \in E\ x = f^{-1}(y) \iff y = f(x)$.

II.3.5 Théorème (De la bijection)
Soient I, J des intervalles et $f : I \to J$. SI

1. *f est continue*
2. $\mathrm{Im}(f) = J$
3. *f est strictement monotone*

ALORS f est une bijection de I dans J. Dans ce cas f^{-1} est une fonction continue et strictement monotone, de même monotonie que f.

Preuve.
Admis provisoirement. ∎

II.3.6 M-Remarque

Pour une fonction monotone strictement et continue, il s'agit en fait de vérifier que l'ensemble image et l'ensemble d'arrivé coincident.

II.3.7 Remarque

Si $f : E \to F$ est une bijection alors $f \circ f^{-1} = id_F$ et $f^{-1} \circ f = id_E$.

II.3.8 Exemple

$x \mapsto \frac{x+1}{x-2}$.

II.3.9 Conséquence sur les courbes

Expliquer le tracé de $\sqrt{}$.

II.3.10 Théorème
Si $f : I \to J$ est dérivable et bijective et que de plus f' ne s'annule pas alors f^{-1} est dérivable et $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

II.3.11 Exemple

Le faire avec la fonction de l'exemple II.3.8, avec f = ln.

III Quelques fonctions usuelles

III.1 Rappels sur l'exponentielle

III.1.1 Définition

La fonction logarithme, notée $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est l'unique primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ s'annulant en 1 de la fonction inverse.

Ainsi $\forall x > 0\ \ \ln'(x) = \frac{1}{x}$ et $\ln(1) = 0$. $\ln$ est donc dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$...

III.1.2 Théorème
Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b) \ \text{ et } \ \ln(\frac{1}{a}) = -\ln(a)$$

Preuve.
On étudie la fonction $f : x \mapsto \ln(ax) - \ln(x)$. On prouve facilement que f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et f est dérivable sur cet intervalle par différence.

De plus, $f' = 0$. Ainsi f est une fonction constante. On note K cette constante. De plus, $f(1) = K = \ln(a)$ donc pour tout $x > 0$ on a $K = \ln(a) = \ln(ax) - \ln(x)$; il suffit d'appliquer à $b > 0$. ∎

III.1.3 Exemple
Montrons par récurrence que $\ln(a_1 a_2 \dots a_n) = \ln(a_1) + \cdots + \ln(a_n)$ pour tous $a_1, \dots a_n$ réels strictement positifs.

III.1.4 Image
$\ln(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}$ que l'on admet provisoirement. On déduit du tableau de variations que $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est une bijection.

III.1.5 Définition
La bijection réciproque que $\ln$ *est la fonction exponentielle notée* $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$.

Par abus, on note souvent pour $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) = e^x$ *où* $e = \exp(1)$ *est LE nombre dont le logarithme vaut 1.*

III.1.6 Propriétés
1. $\exp(0) = 1$
2. $\forall a, b \in \mathbb{R}\ e^{a+b} = e^a e^b$
3. $\exp$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\exp' = \exp$.
4. $\exp$ est strictement positive et strictement croissante.

III.2 Sinus et cosinus hyperbolique

III.2.1 Définition
Soit $x \in \mathbb{R}$. *On appelle cosinus hyperbolique de x (noté ch x) et sinus hyperbolique de x (noté sh x) les réels*

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \ \textit{et}\ \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

III.2.2 Proposition
Les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ *par* $x \mapsto \operatorname{sh} x$ *et* $\operatorname{ch} x$ *sont continue, dérivable et respectivement impaire et paire. On peut vérifier que*

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \ \operatorname{ch}(x)^2 - \operatorname{sh}(x)^2 = 1.$$

De plus $\operatorname{ch}' = \operatorname{sh}$ *et* $\operatorname{sh}' = \operatorname{ch}$.

Preuve.
Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = \frac{1}{4}\left((e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2\right) = \frac{2e^x \times 2e^x}{4} = 1$.

En tant que somme et différence de fonctions dérivables, ces fonctions sont dérivables et on a immédiatement $\operatorname{ch}'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x$ et $\operatorname{sh}'(x) = \frac{e^x - (-e^{-x})}{2} = \operatorname{ch} x$.

Les parités sont triviales à vérifier. ∎

III.2.3 Remarque
C'est la relation $\operatorname{ch}^2 - \operatorname{sh}^2 = 1$ qui fait que les fonctions portent le noms de fonctions trigonométriques hyperboliques. En effet, de la même façon qu'on a la relation

$$x^2 + y^2 = 1 \iff \exists \theta \left\{ \begin{array}{l} x = \cos(\theta) \\ y = \sin(\theta) \end{array} \right.$$

qui donne une paramétrisation du cercle, la relation

$$x^2 - y^2 = 1 \text{ et } x \geqslant 0 \iff \exists t \left\{ \begin{array}{l} x = \operatorname{ch}(t) \\ y = \operatorname{sh}(t) \end{array} \right.$$

donne une paramétrisation d'une branche d'hyperbole.

III.2.4 Proposition
1. $\lim_{\pm\infty} \operatorname{ch} = +\infty$
2. $\lim_{+\infty} \operatorname{sh} = +\infty$ *et* $\lim_{-\infty} \operatorname{sh} = -\infty$

Preuve.
Il s'agit pour ch et sh de simples sommes/différences de limites. ■

III.2.5 Proposition
- *ch est strictement décroissante sur* $]-\infty, 0]$ *et strictement croissante sur* $[0, +\infty[$.
- *sh est strictement croissante sur* $\mathbb{R}$.

III.2.6 Figures

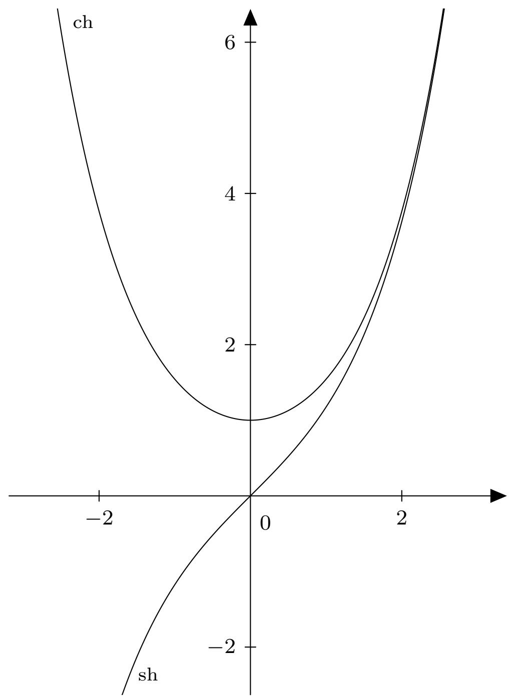


FIGURE 1 – Cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique

III.3 Rappels trigonométriques

III.3.1 Propriétés

1. Les fonctions sin et cos sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ et elles sont 2π-périodiques ie

$$\forall x \in \mathbb{R} \ \cos(x + 2\pi) = \cos x \text{ et } \sin(x + 2\pi) = \sin(x)$$

2. cos est paire et sin est impaire.
3. $\cos' = -\sin$, $\sin' = \cos$.

III.3.2 Tableau de valeurs

On a le tableau de valeurs suivant :

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Les preuves seront faites dans un chapitre ultérieur.

III.3.3 Courbes représentatives

III.3.4 Cercle unité

La formule importante $\cos^2 + \sin^2 = 1$ prouve que le point de coordonnées $\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$ est sur le cercle de centre O et de rayon 1 pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.

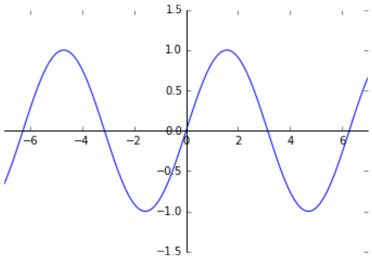


FIGURE 2 – Courbe de sinus

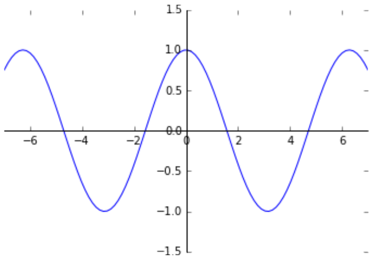


FIGURE 3 – Courbe de cosinus

III.4 La fonction tangente

III.4.1 Définition

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Si $\cos\alpha \neq 0$, alors on définit la tangente de α par

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

D'après le théorème de Thalès, l'interprétation géométrique est alors la suivante.4

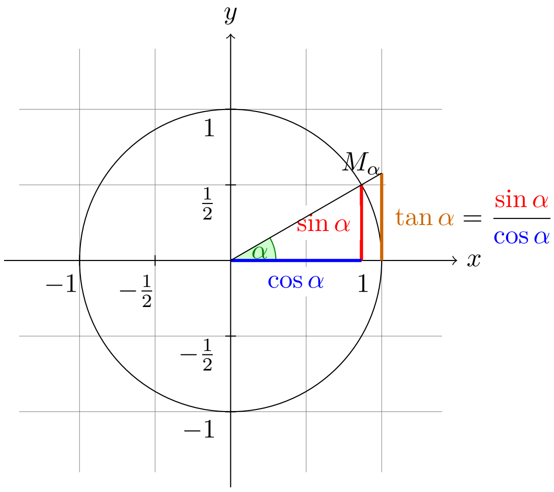


FIGURE 4 – Tangente

III.4.2 Proposition

La fonction $\tan$ est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi |\ k \in \mathbb{Z}\}$, π-périodique et impaire.

Preuve.

Le domaine de définition est évident géométriquement : cos s'annule à l'intersection du cercle unité avec (Oy).

Soit $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Alors

$$\tan(x+\pi) = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \tan x$$

De plus, $\tan(-x) = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$.
Ainsi on va étudier cette fonction sur $[0, \frac{\pi}{2}[$. ∎

III.4.3 Théorème
La fonction tan *est continue et dérivable sur son ensemble de définition et on a pour tout* $x \notin \{\frac{\pi}{2} + k\pi |\ k \in \mathbb{Z}\}$ *:*

$$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$$

Preuve.
tan est continue et dérivable sur son domaine de définition en tant que quotient dont le dénominateur ne s'annule pas.

De plus pour x convenable

$$\tan'(x) = \frac{\cos x \cos x - (-\sin x)\sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$$

Ainsi tan est strictement croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}[$. ∎

III.4.4 Variations

On a $\tan 0 = 0$ et $\tan x \underset{x \to \frac{\pi}{2}^-}{\to} +\infty$.

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$\tan(x)$	0 ↗	$+\infty$

On en déduit que $\tan(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[) = \mathbb{R}$ et donc l'image de tan est $\mathbb{R}$.
Elle n'est pas injective par nature même des fonctions périodiques.

III.4.5 Courbe représentative

La tangente à l'origine est de pente 1.

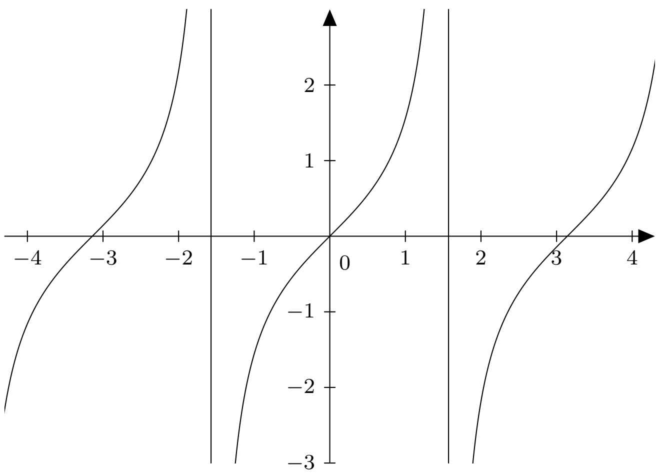


Figure 5 – Tangente

Souvent, on ne s'intéressera qu'à la "première" période de tangente. il ne faudra pas oublier que ce n'est pas la seule.

III.4.6 Exemple
Tracer un tableau de valeurs de tan.

III.4.7 Exemple
Calculer les ensembles de définitions, dérivabilité et dérivée de $x \mapsto \sqrt{\tan x}, x \mapsto \tan(\ln(x)), x \mapsto \frac{\tan x}{x^2+1}$.