Applications linéaires

Antoine Louatron

Table des matières

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne un corps, qui sera pour nous $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Espace des applications linéaires

I.1 $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$

I.1.1 Définition

Soient E,F deux $\mathbb{K}$-ev.

1. *Une application $f : E \to F$ est dite application linéaire si*
$$\forall x,y \in E\ f(x+y) = f(x)+f(y) \text{ et } \forall x \in E \forall \alpha \in \mathbb{K}\ f(\alpha x) = \alpha f(x).$$
Il est équivalent d'imposer $\forall x,y \in E \forall \alpha,\beta \in \mathbb{K}\ f(\alpha x+\beta y) = \alpha f(x)+\beta f(y)$.
L'ensemble des applications linéaires (ou morphismes de $\mathbb{K}$-ev) est noté $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$ ou $\mathcal{L}(E,F)$ quand le corps de base est sous-entendu.
2. *Un application linéaire de E dans E est appelé endomorphisme linéaire. On note $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$ ou $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes linéaires de E.*
3. *Une application linéaire bijective est appelé isomorphisme linéaire, et un endomorphisme bijectif est appelé automorphisme. L'ensemble des automorphismes de E est noté $GL_{\mathbb{K}}(E)$.*
4. *Une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$ est appelé forme linéaire sur E.*

I.1.2 Exemple

1. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. L'application $f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^p & \to & \mathbb{K}^n \\ X & \mapsto & AX \end{array}\right.$ est linéaire. On l'appelle application linéaire canoniquement associée à A.
ex : $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto 2x+z$, $f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ 2x+3y \end{pmatrix}$
2. $T : \left\{\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \\ A & \mapsto & {}^tA \end{array}\right.$ est linéaire. C'est un isomorphisme.
3. Soit $u \in \mathbb{R}^3$ fixé (non nul si on veut que les exemples soient intéressant). $X \mapsto (X|u)$ est linéaire, $X \mapsto X \wedge u$ est linéaire.
4. $D : f \mapsto f'$ est un endomorphisme de $\mathcal{C}^\infty(I,\mathbb{R})$ (I intervalle non vide non réduit à un point, bien évidemment) qui est surjectif et non-injectif.

I.1.3 Image d'une combinaison linéaire

Soit $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ et $f \in \mathcal{L}(E,F)$, alors
$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(e_i).$$
La preuve est la classique récurrence se basant sur le cas $n=2$ vrai par hypothèse de linéarité.

I.1.4 M-Ex

Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $(e_1,\ldots,e_n)$ une famille de vecteurs de E. L'application
$$\varphi : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \to & E \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \mapsto & \sum_{i=1}^n x_i e_i \end{array}\right.$$
est linéaire. De plus elle est injective ssi la famille est libre, surjective ssi la famille est génératrice. Dans ce cas ou $\mathcal{B} = (e_1,\ldots,e_n)$ est une base, la réciproque de φ est l'application $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}$ qui est également linéaire

I.1.5 Proposition

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

1. $f(0_E) = 0_F$
2. $\forall x \in E\ f(-x) = -f(x)$

Preuve.
Prendre respectivement $\alpha = \beta = 0$ et $\alpha = -1, \beta = 0$. ■

I.2 Structure algébrique

I.2.1 Théorème
Soient E, F, G des $\mathbb{K}$-ev.

1. *$\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ est un $\mathbb{K}$-ev avec $0_{\mathcal{L}(E,F)}$ l'application nulle.*
2. *Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$ alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$.*
3. *Soient $f_1, f_2 \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g_1, g_2 \in \mathcal{L}(F, G)$.*

$$g_1 \circ (f_1 + f_2) = g_1 \circ f_1 + g_1 \circ f_2 \text{ et } (g_1 + g_2) \circ f_1 = g_1 \circ f_1 + g_2 \circ f_1$$

Preuve.

1. On sait déjà que F^E est un $\mathbb{K}$-ev. On va montrer que $\mathcal{L}(E, F)$ en est un sev. On a évidemment $0 : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ x & \mapsto & 0_F \end{array} \right. \in \mathcal{L}(E, F)$. Soient maintenant $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. On veut montrer que $\lambda f + \mu g$ est linéaire. Soient donc $x, y \in E$ et $\alpha, \beta \in K$
$$\begin{aligned}(\lambda f + \mu g)(\alpha x + \beta y) &= \lambda f(\alpha x + \beta y) + \mu g(\alpha x + \beta y) = \lambda\alpha f(x) + \lambda\beta f(y) + \mu\alpha g(x) + \mu\beta g(y) \\ &= \alpha(\lambda f(x) + \mu g(x)) + \beta(\lambda f(y) + \mu g(y)) = \alpha(\lambda f + \mu g)(x) + \beta(\lambda f + \mu g)(y)\end{aligned}$$
2. Montrons que $f \circ g$ est linéaire. Soient donc $x, y \in E$, $\alpha\beta \in \mathbb{K}$.
$g \circ f(\alpha x + \beta y) = g(f(\alpha x + \beta y)) = g(\alpha f(x) + \beta f(y)) = \alpha g(f(x)) + \beta g(f(x))$.
3. Le fait que f, g soient linéaire n'est pas utile pour prouver $(g + g') \circ f = g \circ f + g' \circ f$ qui est vrai pour toutes fonctions (à condition de pouvoir donner un sens aux objets).
Maintenant Soit $x \in E$. $g((f + f')(x)) = g(f(x) + f'(x)) = g(f(x)) + g(f'(x))$. ■

I.2.2 Résumé des propriétés

$(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ est un anneau non commutatif avec $1_{\mathcal{L}(E)} = Id_E$. Autrement dit, pour $f, g, h \in \mathcal{L}(E)$:

— $(f + g) + h = f + (g + h)$ (associativité)

— $f + g = g + f$ (commutativité de $+$)

— $f + 0 = 0 + f$ (0 est neutre pour $+$)

— f possède un opposé qui est $-f : x \mapsto -f(x)$ ($= f(-x)$ d'ailleurs).

— $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$ (qui est vrai pour toutes les fonctions d'ailleurs, sous condition d'existence des composées)

— $f \circ Id_E = Id_E \circ f = f$ (Id_E est le neutre de la composition)

— $f \circ (g + h) = f \circ g + f \circ h$ et $(f + g) \circ h = f \circ h + g \circ h$.

I.2.3 M-attention

On adopte à partir de maintenant les notations classiques dans un anneau : f^k est la "puissance" $k$ième de f, c'est à dire $f \circ f \cdots \circ f$.

I.2.4 Remarque

1. $\mathcal{L}(E)$ n'est pas commutatif. Par exemple avec $E = K[X]$ on pose $f : P \mapsto P'$ et $g : P \mapsto XP$. Ce sont deux endomorphismes de E mais il ne commutent pas.
2. Si $f, g \in \mathcal{L}(E)$ **commutent** alors on peut appliquer la formule du binôme de Newton et $f^n - g^n = (f - g) \circ \sum_{k=0}^{n-1} f^k \circ g^{n-1-k}$ où les puissances désignent la composition itérée.

I.2.5 Proposition
Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $f, g \in GL(E)$. Alors $f \circ g \in GL(E)$ et $f^{-1} \in GL(E)$, on dit que $GL(E)$ est un groupe pour $\circ$. (On a déjà vu que l'identité est un automorphisme).

Preuve.
— Id_E est le neutre de $GL(E)$ pour $\circ$.
— D'après le théorème précédent, $g \circ f$ est linéaire. De plus comme f et g sont des bijections, leur composée l'est aussi.
— Soient $a, b \in E$ et $x, y \in E$ tels que $f(x) = a$ et $f(y) = b$. Soient également $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$

$$f^{-1}(\alpha a + \beta b) = f^{-1}(\alpha f(x) + \beta f(y)) = f^{-1}(f(\alpha x + \beta y)) = \alpha x + \beta y = \alpha f^{-1}(a) + \beta f^{-1}(b).$$

Donc f^{-1} est une bijection linéaire de E dans E.

Ces trois points font de $GL(E)$ un sous groupe de S_E (l'ensemble des bijections de E dans E munit de la composition.) ∎

I.3 Noyau

I.3.1 Définition
Soit $f : E \to F$ une application $\mathbb{K}$-linéaire. On appelle noyau de f et on note $\ker f$ *l'ensemble* $\ker f = \{x \in E |\ f(x) = 0_F\} = f^{-1}(\{0_F\})$.

I.3.2 Proposition
Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$. Alors $\ker f$ *est un sev de E*

Preuve.
$f(0) = 0$ donc $0_E \in \ker u$. La stabilité par combinaison linéaire est immédiate par linéarité de f. ∎

I.3.3 Exemple
1. L'application qui à $y \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$ associe $ay'' + by' + cy$ est linéaire, donc son noyau (l'ensemble des solutions de l'EDL) est un sev !.
2. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto ax + by$ est une forme linéaire si on fixe $a, b \in \mathbb{R}$ (elle est canoniquement associée à la ligne $(a\ b)$). Ainsi toute droite vectorielle du plan est bien un sev de $\mathbb{R}^2$.

I.3.4 Remarque

On a ici un autre moyen de montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel : l'exprimer comme noyau d'une application linéaire.

I.3.5 Exemple
$f : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ A & \mapsto & A - {}^tA \end{cases}$ est linéaire car c'est une c.l. d'application linéaires. Son noyau est l'ensemble des matrices symétriques qui est donc un sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On a montré en TD que la dimension de ce noyau est $\frac{n(n+1)}{2}$.

I.3.6 Théorème
Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$.
f est injective ssi $\ker f = \{0_E\}$.

Preuve.
— Si f est injective, soit $x \in \ker f$. Comme $f(x) = f(0_E) = 0_E$ alors $x = 0_E$.

— Réciproquement, supposons $\ker f = \{0_E\}$. Soient $x, y \in E$ tels que $f(x) = f(y)$ ie $f(x-y) = 0$ (linéarité). Alors $x - y \in \ker f$ donc $x = y$ et f est injective. ∎

I.3.7 Proposition
Soit E un $\mathbb{K}$ev de dimension finie et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire.

$$f \text{ est injective } \iff (f(e_1), \ldots, f(e_n)) \text{ est libre dans } F$$

Preuve.

— $\Rightarrow$

Supposons f injective. On sait que $(e_1, \ldots, e_n)$ est libre, on va montrer que la famille $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ l'est aussi. Si on a $\sum_{i=1}^n \lambda_i f(e_i) = 0$ pour $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ alors $f(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i) = 0$ par linéarité puis $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = 0$ par injectivité. La liberté de $(e_1, \ldots, e_n)$ conclut.

— $\Leftarrow$ On suppose maintenant que $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est libre dans F.

Soit $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$ (coordonnées) tel que $f(x) = 0_E$. On a alors $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i f(e_i) = 0$ et liberté de $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$, $\forall i \in [\![1, n]\!]$ $x_i = 0$. Donc f est injective car son noyau est nul. ∎

I.3.8 Noyau d'une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice et f_A son alca : $\mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n$. On appelle noyau de A le noyau de f_A ie l'ensemble des solutions du système homogène associé à A. C'est un $\mathbb{K}$-ev de dimension $p - \text{rg}(A)$ d'après le chapitre sur les systèmes.

I.3.9 Exemple
Calculer le noyau de $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x + y - 2z \\ x - y + z \end{pmatrix} \end{array} \right.$.

I.4 Image

I.4.1 Définition
Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. L'image de f et on note $\operatorname{Im} f$ *l'ensemble* $\operatorname{Im} f = \{f(x)|\ x \in E\}$.

I.4.2 Exemple
Trouver l'image de $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x + 2y + z, 2x + y - z, x + 2y + z) \end{array} \right.$.

On raisonne par analyse/synthèse. On prend (α, β, γ) et on se demande si on peut trouver $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $f(x, y, z) = (\alpha, \beta, \gamma)$, c'est à dire que l'on résout un système de second membre paramétré.

I.4.3 Remarque

Une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est surjective ssi $\operatorname{Im} f = F$ par définition.

I.4.4 Proposition
Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ et $E = Vect(e_1, \ldots, e_n)$. Alors $\operatorname{Im} f = Vect(f(e_1), \ldots, f(e_n))$.

Preuve.
Tout d'abord, on a bien entendu $\forall i \in [\![1, n]\!]$ $f(e_i) \in \operatorname{Im} f$. Ainsi $\text{Vect}((f(e_i))_{i \in [\![1,n]\!]}) \subset \operatorname{Im} f$.

Ensuite si $x \in E$ alors $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$ et $f(x) = f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(e_i) \in \text{Vect}((f(e_i))_i)$. Comme tout élément de $\operatorname{Im} f$ est de la forme $f(x)$ pour un $x \in E$, on vient de prouver la deuxième inclusion. ∎

I.4.5 Corollaire
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension fini Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. f est surjective ssi $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est génératrice de F.

Preuve.
Trivial. ∎

I.4.6 Exemple
Montrer que $f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 2x+y-z \\ -x+2y+z \\ 3x-y-2z \end{pmatrix} \end{array}\right.$ est linéaire et calculer son image (équations).

II Applications linéaires en dimension finie

II.1 Isomorphismes

II.1.1 Proposition
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.
Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. f est un isomorphisme ssi $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une base de F.
En particulier $\dim_{\mathbb{K}} F = n$.

Preuve.
C'est une conséquence directe de I.3.7 et I.4.5. ∎

II.1.2 Remarque

Un isomorphisme linéaire transforme toute base en une base, et réciproquement une al qui transforme une base en une base est un isomorphisme.

II.1.3 Exemple
Montrer que $f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x+2y-z \\ 3x-2y+z \\ x+2y+2z \end{pmatrix} \end{array}\right.$ est une bijection.

Comparer les méthodes ! Ho encore une CNS d'inversibilité pour les matrices. ;.

II.1.4 Définition
Deux $\mathbb{K}$-ev E et F sont dits isomorphes s'il existe $f \in \mathcal{L}(E, F)$ qui soit un isomorphisme.

II.1.5 Corollaire
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n. et F un $\mathbb{K}$-ev.

1. *Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire injective. Soit G un sev de E de dimension finie p. Alors $f(G)$ est de dimension finie p.*
2. *E et $\mathbb{K}^n$ sont isomorphes*
3. *E et F sont isomorphes ssi $\dim(F) = \dim(E)$.*

Preuve.

1. La restriction $f_{|G} : G \to f(G)$ est linéaire et bijective.
2. Soit $\mathcal{B}$ une base de E, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}$ est un isomorphisme.
3. Il s'agit de prouver que si leurs dimensions sont égales, alors il existe un isomorphisme de E dans F. Soient $\mathcal{B}_E$ une base de E et $\mathcal{B}_F$ une base de F. Alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}^{-1} \circ \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}$ convient. ∎

II.1.6 Exemple
Tout $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ n'est pas un isomorphisme. Elle ne peut pas être surjective.

II.1.7 Théorème
Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de même dimension n et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
f est injective ssi f est surjective ssi f est bijective.

Preuve.
Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. f est injective ssi $f(\mathcal{B})$ est libre ssi $f(\mathcal{B})$ est génératrice (car $\dim F = \mathrm{Card}(f(\mathcal{B}))$) ssi f est surjective. ∎

II.2 Rang

II.2.1 Définition

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-ev de dimensions finies et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. On appelle rang de f et on note $\operatorname{rg}(f)$ *la dimension de* $\operatorname{Im} f$.

II.2.2 Remarque

1. $\operatorname{Im} f$ est un sev de F donc $\operatorname{rg} f \leqslant \dim F$.
2. Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E alors $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est génératrice de $\operatorname{Im} f$ et donc
$$\operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg}(f(e_1), \dots, f(e_n))$$
donc $\operatorname{rg} f \leqslant \dim E$.

II.2.3 Lemme

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-ev et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Si $\ker f$ *admet un supplémentaire H dans E alors $f_{|H} : H \to \operatorname{Im}(f)$ est un isomorphisme de H dans* $\operatorname{Im} f$.

Preuve.
On a $f_{|H} : \left\{ \begin{array}{ccc} H & \to & \operatorname{Im} f \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \right.$ et $H \oplus \ker(f) = E$. Il s'agit bien d'une application linéaire de $\mathcal{L}(H, \operatorname{Im} f)$.

— $\ker f_{|H} = \{x \in H |\ f(x) = 0\} = H \cap \ker f = \{0_E\}$ car H et $\ker f$ sont en somme directe.

— Soit $y \in \operatorname{Im} f$. Alors il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$. Or on peut écrire $x = x_H + x_K$ avec $x_H \in H$ et $x_K \in \ker f$. Ainsi $f(x) = f(x_H) + f(x_K) = f(x_H) + 0_E$ et donc $y = f(x_H) = f_{|H}(x_H)$. Donc $\operatorname{Im} f_{|H} = \operatorname{Im} f$.

Finalement $f_{|H}$ est bien un isomorphisme linéaire. ∎

II.2.4 Théorème (Théorème du rang)

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-ev et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Si E est de dimension finie alors
$$\dim E = \dim(\ker f) + \operatorname{rg}(f).$$

Preuve.
Soit H un supplémentaire de $\ker f$ dans E (possible car E de dimension finie). Alors d'après le lemme $\operatorname{rg} f = \dim H = \dim E - \dim \ker E$. ∎

II.2.5 Remarque

1. $\operatorname{rg}(f) \leqslant \dim E$ et $\operatorname{rg}(f) \leqslant \dim F$.
2. On a pas besoin de supposer F de dimension finie.
3. Ce n'est pas parce que $\dim \ker f + \operatorname{rg} f = \dim E$ que $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$ sont supplémentaires ! A priori, ils ne sont pas sev du même ev, et même si $E = F$ il se peut que ces espaces ne soient pas supplémentaires. $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (y,0) \end{array} \right.$

II.2.6 Exemple

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ $(n \geqslant 2)$. Si f n'est pas l'application nulle alors $\operatorname{rg} f = 1$ et donc $\ker f$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^n$.

II.2.7 Proposition

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

1. *f est surjective ssi* $\operatorname{rg} f = \dim F$.
2. *f est injective ssi* $\operatorname{rg} f = \dim E$.
3. *Si* $\dim E = \dim F$, *f est bijective ssi f est injective ssi f est surjective.*

Preuve.

1. f est surjective ssi $\operatorname{Im} f = F$, c'est à dire, comme $\operatorname{Im} f \subset F$, ssi $\operatorname{rg} f = \dim f$.
2. f est injective ssi $\dim(\ker f) = 0$ ssi $\dim E = \operatorname{rg} f$ d'après le théorème du rang.
3. Il suffit de combiner les deux propositions précédentes. ∎

Explication En pratique, on divise le travail par deux quand on a affaire à des espaces de même dimension. Un noyau est souvent plus facile à calculer qu'une image.

II.2.8 Corollaire
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors $f \in Gl(E)$ ssi f est injective ssi f est surjective (ssi l'image d'une base est une base).

II.2.9 Exemple
L'application $\varphi : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{K}_n[X] & \to & \mathbb{K}_n[X] \\ P & \mapsto & XP' + P(0) \end{array} \right.$ est un automorphisme.

II.2.10 Proposition
Soient E, F deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. *Soit F' un espace vectoriel et $\varphi : F \to F'$ un isomorphisme, alors $\operatorname{rg}(\varphi \circ f) = \operatorname{rg} f$.*
2. *Soit E' un $\mathbb{K}$-ev et $\psi : E' \to E$ un isomorphisme, alors $\operatorname{rg}(f \circ \psi) = \operatorname{rg} f$.*

Preuve.

1. $\operatorname{Im}(\varphi \circ f) = \varphi(f(E))$ or $\dim(\varphi(G)) = \dim G$ pour tout sous espace G et F.
2. $\operatorname{Im}(f \circ \psi) = f(\psi(E')) = f(E') = \operatorname{Im}(f)$. ∎

Explication Ce qu'il faut retenir c'est qu'un isomorphisme conserve la dimension, donc le rang.

II.2.11 Remarque

En général, $\ker g \subset \ker f \circ g$ et $\operatorname{Im} f \circ g \subset \operatorname{Im} f$.

II.2.12 Rang d'une composition

On souhaite étudier le rang de $f \circ g$ où f, g sont des applications linéaires. Pour simplifier les notations, on prend $f, g \in \mathcal{L}(E)$ où E est de dimension finie (le cas général ammène à considérer 3 espaces de dimensions finies).

$\operatorname{rg}(f \circ g) = \dim(f(g(E))) \leqslant \dim(f(E)), \dim(g(E))$ et donc $\operatorname{rg}(f \circ g) \leqslant \max(\operatorname{rg}(f), \operatorname{rg}(g))$.

A quelle condition a-t-on $\operatorname{rg}(f \circ g) = \operatorname{rg}(g)$?

Pour cela il faut que $\dim(f(g(E))) = \dim(g(E))$. D'après le théorème du rang, $\operatorname{rg}(f \circ g) = \dim(f(g(E))) = \dim(g(E)) - \dim(\ker(f_{|g(E)})) = \operatorname{rg}(g) - \dim(\ker(f) \cap \operatorname{Im}(g))$. Ainsi $\operatorname{rg}(f \circ g) = \operatorname{rg}(g) \iff \ker(f) \cap \operatorname{Im}(g) = \{0_E\}$.

Le cas $\operatorname{rg}(f \circ g) = \operatorname{rg}(f)$ est un peu plus délicat à traiter. On veut $\dim(f(g(E))) = \dim(f(E))$. Heureusement que l'on a déjà trouvé une bonne condition juste au dessus. Si $\ker(f) \cap \operatorname{Im}(g) = \{0_E\}$ alors $\operatorname{rg}(f \circ g) = \operatorname{rg}(g)$. Pour avoir l'égalité voulue il faut $\operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg}(g)$ et donc d'après le théorème du rang, $\ker(f) \oplus \operatorname{Im}(g) = E$. Dans le cas général on doit avoir $\operatorname{rg}(g) \geqslant \operatorname{rg}(f)$. Soit H un supplémentaire de $\ker(f) \cap \operatorname{Im}(g)$ dans $\operatorname{Im}(g)$, c'est à dire qu'on considère "la partie de $\operatorname{Im}(g)$ qui n 'est pas dans $\ker(f)$". D'après le théorème du rang, $f(g(E)) = f(\operatorname{Im}(g)) = f(H)$. De plus, si H_1 est un supplémentaire de $\ker(f)$ dans E alors $f(H_1) = f(E)$. On veut donc $f(H) = f(H_1)$. Or, f est injective sur H et sur H_1 (encore et toujours le théorème du rang, ou le lemme précédent si on préfère). Donc $\dim(H_1) = \dim(H)$. Or $H \cap \ker(f) = \{0\}$ car $H \subset \operatorname{Im}(g)$ et donc $H \cap \ker(f) = (H \cap \operatorname{Im}(g)) \cap \ker f$. Donc H est un supplémentaire de $\ker(f)$ dans E.

Conclusion : $\operatorname{rg}(f \circ g) = \operatorname{rg}(f)$ ssi $\operatorname{Im}(g)$ contient un supplémentaire de $\ker(f)$ dans E. On a analysé le sens direct et la réciproque est facile via le lemme précédent le théorème du rang.

III Matrices

III.1 Matrice d'une application linéaire

III.1.1 Définition

1. *Soient E, F deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie de dimension respectives p et n. On note $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E et $\mathcal{B}_F = (u_1, \dots, u_n)$ une base de F. Soit également $f \in \mathcal{L}(E, F)$. La matrice de f dans $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ (noté $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f)$) est la matrice $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_F}(f(e_1), \dots, f(e_p)) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.*

   C'est la matrice des coordonnées des $f(e_j)$ dans $u_1, \dots, u_n$, écrites en colonnes.
2. *si $f \in \mathcal{L}(E)$, on note $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_E}(f) = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_E}(f) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.*

III.1.2 Remarque

Encore une fois la matrice est très dépendante des bases choisies. On note toujours les vecteurs en colonnes. Si les espaces considérés possèdent des bases canoniques et que l'on choisi ces bases, on appelle la matrice obtenue la matrice canoniquement associée à f.

III.1.3 Exemple

1. On pose $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}_3$ les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ respectivement.
   De plus $\varphi : (x, y) \mapsto (x, x + y, x - y)$. Donner $\text{Mat}_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_3}(\varphi)$.
   On pose $\mathcal{B}'_2 = ((0, 1), (1, 0))$ et $B'_3 = ((1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0))$. Donner $\text{Mat}_{\mathcal{B}'_2,\mathcal{B}'_3}(\varphi)$.
2. On se place dans $\mathbb{R}_3[X]$. La famille $\mathcal{B} = (1, (X - 1), (X - 1)^2, (X - 1)^3)$ est libre car composée de polynômes de degrés différents et est donc une base (famille libre à 4 éléments dans un espace de dimension 4). Calculer la matrice de la dérivation dans cette base.
   Calculer également la matrice de la dérivation dans la base canonique.
3. Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et $\mathcal{B}$ une base de E. Alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(Id_E) = I_n$.

III.1.4 Application canoniquement associée à une matrice

La dénomination alca à $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ prend maintenant tout son sens. Il s'agit d'une application linéaire dont la matrice dans les bases canoniques est A. En effet, pour rappel, si on note E_i le ième vecteur de la base canonique de $\mathbb{K}^p$ alors $AE_i = C_i$ la ième colonne de A, par définition du produit matriciel.

III.1.5 Théorème
Soient E, F deux $\mathbb{K}$-ev de dimensions p et n respectivement. Soient $\mathcal{B}_E$ une base de E et $\mathcal{B}_F$ une base de F. Alors

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E, F) & \to & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ f & \mapsto & \text{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f) \end{array} \right.$$

est un isomorphisme linéaire.

Preuve.
Il suffit d'écrire ce que l'on doit vérifier et de penser au sens des objets pour se rendre compte que l'application est linéaire : le coeur du calcul est $(\alpha f + \beta g)(e_j) = \alpha f(e_j) + \beta g(e_j)$, c'est à dire que chaque colonne de la matrice de $\alpha f + \beta g$ est une combinaison des colonnes correspondantes des matrices de f et g. On conclut par opérations sur les matrices.

On va montrer la bijectivité.

1. Calculons $\ker \varphi$. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ de matrice nulle ie l'image de tout vecteur de $\mathcal{B}_E$ est nulle.
   Alors pour $x \in E$ de coordonnées $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ ie $x = \sum_1^n x_i e_i$ on a $f(x) = \sum_1^n x_i f(e_i) = \sum_1^n 0_F = 0_F$ donc f est l'application nulle.
   Finalement, φ est injective.
2. Pour montrer la surjectivité, on revient à la définition par on ne connaît pas encore la dimension ni de base de $\mathcal{L}(E, F)$.
   Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, montrons que M possède un antécédent ie montrons qu'il existe une al dont la matrice dans $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ est M. On pose f_A l'alca à A, $f_A \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$. Soit maintenant $f = \text{Mat}_{\mathcal{B}_F}^{-1} \circ f_A \circ \text{Mat}_{\mathcal{B}_E} \in \mathcal{L}(E, F)$. Montrons que $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f) = A$. Soit $i \in [\![1, p]\!]$. $f(e_i) = \text{Mat}_{\mathcal{C}}^{-1}(f_A(e'_i))$ où e'_i est le ième vecteur de la base canonique de $\mathbb{K}^p$. Ainsi $f_A(e'_i) = C_i$ la ième colonne de A. Finalement $f(e_i) = \text{Mat}_{\mathcal{C}}^{-1}(C_i)$ c'est à dire $f(e_i)$ est le vecteur de F dont les coordonnées dans $\mathcal{B}_F$ est le vecteur C_i. Donc la ième colonne de la matrice de f dans les bases considérées est C_i. CQFD. ∎

III.1.6 Remarque

Etant données deux bases, à chaque matrice correspond exactement une application linéaire. On pourra ainsi passer d'un point de vue à l'autre suivant les besoins. On peut parler de LA matrice d'une al et de L'al d'une matrice.

A condition, rappelons le, d'avoir au préalable fixé deux bases : une à l'arrivée, l'autre au départ.

III.1.7 Corollaire
Soit E de dimension p et F de dimension n deux $\mathbb{K}$ev. Alors

$$\dim(\mathcal{L}(E,F)) = np$$

III.1.8 M-Remarque

On a même obtenu une base de $\mathcal{L}(E,F)$ étant donné $\mathcal{B}_E$ base de E et $\mathcal{B}_F$ base de F. On pose $f_{i,j}$ dont la matrice dans $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ est la matrice nulle partout sauf en i,j où elle vaut 1. On a donc $f_{i,j}(e_k) = \delta_{j,k} f_i$ avec $\delta_{i,k} = 0$ si $i \neq k$ et 1 si $i = k$.

III.1.9 Proposition
Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $A = B$ ssi $\forall X \in \mathbb{K}^p AX = BX$.

Preuve.
Deux al dont égales ssi elles ont même ensemble de départ, même ensemble d'arrivé et même procédé.

Il suffit de considérer les al canoniquement associées qui ont même ensemble de départ et d'arrivée. Elles sont égales (et donc ont même matrice) ssi elles ont même procédé ssi $\forall X \in \mathbb{K}^p$ $AX = BX$. ■

III.1.10 Théorème
Soit $f : E \to F$ une application linéaires entre ensemble de dimensions finies de bases respectives $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$. f est un isomorphisme ssi $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f)$ est inversible.

Preuve.
f est un isomorphisme ssi $f(\mathcal{B}_E)$ est une base de F ssi $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(f(\mathcal{B}_E))$ est inversible. ■

III.2 Produit matriciel

III.2.1 Proposition
Soit E, F deux $\mathbb{K}$-ev de dimensions respectives p et n et $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F$ des bases de E et F. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $x \in E$.

On note $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f)$ et $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_p \end{pmatrix}$.

Alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(f(x)) = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^p a_{1k}x_k \\ \dots \\ \sum_{k=1}^p a_{nk}x_k \end{pmatrix} = AX$.

Preuve.
On note $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_p)$.

De plus $x = \sum_{k=1}^p x_k e_k$ et donc $f(x) = \sum_{k=1}^p x_k f(e_k)$. Ainsi $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(f(x)) = \sum_{k=1}^n x_k \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(f(e_k))$. Si on note C_k la kième colonne de A alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(f(x)) = \sum_1^n x_k C_k = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$. CQFD. ■

III.2.2 Exemple
Donner la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ de $P \mapsto P + P'$.

A l'aide de cette matrice, calculer l'image de $X^2 + 2X + 2$.

Donner la matrice de l'image de la base canonique, les coordonnées étant calculées dans la base canonique.

III.2.3 Remarque

Par définition de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f)$, les colonnes de cette matrice engendrent l'espace des coordonnées dans $\mathcal{B}_F$ des vecteurs de $\mathrm{Im}\, f$.

III.2.4 M-Remarque

1. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. L'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^p & \to & \mathbb{K}^n \\ X & \mapsto & AX \end{array} \right.$ est linéaire car c'est l'application linéaire canoniquement associée à A.
2. On note $C_1, \dots C_p$ les colonnes de A et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$. On a $AX = x_1C_1 + x_2C_2 + \cdots + x_pC_p$.

   Ainsi $AX = 0$ (X est dans le noyau de f) ssi ses coefficients forment une combinaison linéaire nulle des colonnes de A.
3. L'image de f est engendré par les colonnes de A.

III.2.5 Théorème
Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-ev de dimensions respectives q, p, n et de bases $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_q)$, $\mathcal{B}' = (f_1, \dots, f_p)$, $\mathcal{B}'' = (g_1, \dots g_n)$. Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$.

On pose de plus $M_f = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $M_g = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(g) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Alors $C = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(g \circ f) = M_gM_f = C \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$

Rappel : si $C = AB$, $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$.

Preuve.
D'après le théorème précédent, les coordonnées de $f(x)$ sont BX pour tout x de coordonnées X dans $\mathcal{B}$. Alors les coordonnées de $g(f(x))$ dans $\mathcal{B}''$ sont $M_g(M_fX) = (M_gM_f)X$.

Si on note C la matrice de $g \circ f$ dans les bonnes bases, on obtient CX pour les coordonnées de $g(f(x))$. D'après la proposition III.1.9, $M_gM_f = C$. ■

III.2.6 Exemple
On considère $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ 2x-y \end{pmatrix} \end{array} \right.$ dont la matrice dans les bases canoniques est $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$.

On pose également $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x+y-z \\ 2x-y+3z \end{pmatrix} \end{array} \right.$ de matrice dans les bases canoniques $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

On en déduit que $g \circ f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ 7x \end{pmatrix}$.

III.2.7 Résumé

1. $rg(f) = rg(M)$, par définition du rang et d'après le cours sur les espaces vectoriels.
2. $f(x)$ se calcule par MX
3. $\mathrm{Mat}(g \circ f) = \mathrm{Mat}(g) \times \mathrm{Mat}(f)$. Ceci prouve (enfin !), l'associativité du produit matriciel.

III.3 Changement de base

Rappels Aller revoir la définition de matrice de passage et la formule $X = PX'$.

III.3.1 M-Remarque

Soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ deux bases de E. Alors $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(id_(E))$ car $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$.
La formule $X = PX'$ s'écrit donc $x = id_E(x)$ sachant que l'identité est considérée de la base $\mathcal{B}'$ vers la base $\mathcal{B}$.

III.3.2 Théorème
Soient E, F deux $\mathbb{K}$-ev $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}'_E$ deux bases de E et $\mathcal{B}_F, \mathcal{B}'_F$ deux bases de F. On note P la matrice de passage de $\mathcal{B}_E$ à $\mathcal{B}'_E$ et Q la matrice de passage de $\mathcal{B}_F$ à $\mathcal{B}'_F$.

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On pose $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f)$ et $M' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'_E, \mathcal{B}'_F}(f)$. Alors $M' = Q^{-1}MP$

Preuve.
Pour $x \in E$ on pose $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(X)$ et $X' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'_E}(x)$. On a alors $X = PX'$.

De plus $MX = QM'X'$ (en posant $MX = Y \in \mathbb{K}^n$ on a bien $Y = QY'$) et ainsi $MPX' = QM'X'$ ou encore $Q^{-1}MPX' = M'X'$ pour tout $X' \in \mathbb{K}^p$ (car on a pris x quelconque)

Finalement $M' = Q^{-1}MP$ ■

III.3.3 Remarque

1. En particulier, si $f \in \mathcal{L}(E)$, on a $M' = P^{-1}MP$.
2. On retrouve le résultat sur le produit de matrice de passage en appliquant deux fois ce théorème.

III.3.4 Exemple
Soit $f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x-y \\ -x+y \end{pmatrix}$. Calculer la matrice de f dans la base $(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix})$ directement.

En déduire l'expression de f^n.

IV Equations linéaires

IV.1 Solutions

IV.2 Application aux suites récurrentes

On cherche à trouver toutes les suites vérifiant $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$

IV.2.1 Solutions géométriques

Une suite $u_n = r^n$ avec $r \neq 0$ est solution de cette relation de récurrence ssi $r^2 - ar - b = 0$

IV.2.2 Liberté

1. Si $r_1 \neq r_2$ sont deux nombres de $\mathbb{K}$ alors $(r_1^n), (r_2^n)$ forment une famille libre.

   En effet si on a $\lambda(r_1^n) + \mu(r_2^n) = 0_{\mathbb{R}^\mathbb{N}}$ on a pour les deux premiers rangs : $\begin{cases} \lambda + \mu & = 0 \\ \lambda r_1 + \mu r_2 = 0 \end{cases}$.

   Le déterminant de la matrice associée est $r_2 - r_1 \neq 0$ et donc ce système homogène admet une unique solution $\lambda = \mu = 0$.
2. Si $r \in \mathbb{K}^*$ alors (r^n) et (nr^n) forment une famille libre de $\mathbb{K}^\mathbb{N}$. On obtient comme système $\lambda = 0$ et $\lambda r + \mu r = 0$...

IV.2.3 Dimension de l'ensemble des solutions

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^\mathbb{N} & \to & \mathbb{R}^\mathbb{N} \\ (u_n) & \mapsto & (u_{n+2} - au_{n+1} - bu_n) \end{cases}$ pour $a, b \in \mathbb{K}$ fixés.

Alors $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^\mathbb{N})$ et son noyau $F = \ker f = (u_n) | \forall n \in \mathbb{N} u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ est un espace vectoriel.

De plus l'application $\begin{cases} \ker f & \to & \mathbb{R}^2 \\ (u_n) & \mapsto & \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} \end{cases}$ est un isomorphisme linéaire. Ainsi $\dim(\ker f) = 2$.

IV.2.4 Ensemble des solutions

On suppose $a \neq 0$. Soit $\Delta = a^2 + 4b$.

1. Si $\Delta \neq 0$ alors on a trouvé l'ensemble des solutions, a savoir $\mathrm{Vect}(r_1^n, r_2^n)$ où r_1 et r_2 sont les solutions de l'équation caractéristique.
2. Si $\Delta = 0$, on note $r = \frac{a}{2}$ la racine double (non nulle car $a \neq 0$). Montrons que la suite (nr^n) vérifie la relation de récurrence. $(n+2)r^2 - a(n+1)r - bn = (n+2)(ar+b) - anr - ar - bn = 2ar - ar + 2b = 2b + ar = \frac{4b+a^2}{2} = \frac{\Delta}{2} = 0$.

IV.3 Equations différentielles

Les applications $y \mapsto y' + a(t)y$ et $y \mapsto y'' + ay' + by$ sont linéaires donc les ensembles de solutions d'équation diff étudiés en début d'année sont des sev.

V Espaces supplémentaires

V.1 Déterminer une application linéaire

Rappel Pour déterminer complètement une al il suffit de connaître l'image d'une base.

V.1.1 Restrictions

On suppose $E = E_1 \oplus E_2$ et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Si on connaît $f(x_1)$ pour tout $x_1 \in E_1$ et $f(x_2)$ pour tout $x_2 \in E_2$ alors l'application f est completement déterminée

En effet pour tout $x \in E$ on peut écrire de manière UNIQUE $x = \underbrace{x_1}_{\in E_1} + \underbrace{x_2}_{\in E_2}$ et donc $f(x) = f(x_1) + f(x_2)$.

V.1.2 Exemple
Montrer que $F = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $G = \text{Vect}(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix})$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$. On note ces 3 vecteurs e_1, e_2 et e_3 respectivement. Calculer les coordonnées de $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.

On trouve $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x+y+z)e_1 + (y+z)e_2 + (x+2y+z)e_3$

Soit f l'application qui est nulle sur F et qui est l'identité sur G. Calculer $f(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix})$.

1. Méthode 1 : On décompose $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ suivant F et G grâce au calcul précédent. On applique la définition de f.
$f(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = (x+2y+z)e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ x+2y+z \\ -x-2y-z \end{pmatrix}$.
2. Méthode 2 : Calculer la matrice de f dans $\mathcal{B}$ puis changement de base. On pose P la matrice de passage de $\mathcal{B}_{can}$ à $\mathcal{B}$. Alors $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Soit M la matrice cherchée et M' la matrice dans $\mathcal{B}$. Alors $M' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Alors $M = PM'P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ où l'on a utilisé respectivement l'interprétation par colonnes puis par lignes du produit matriciel.

V.2 Projecteurs

V.2.1 Définition
Soit E un $\mathbb{K}$-ev. Soient également F, G deux sev supplémentaires. Tout $x \in E$ s'écrit donc de manière unique comme $x_F + x_G$ avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$. L'application qui à x associe x_F est appelé projecteur sur F parallèlement à G (ou de direction G).

Explication Dessin
Ne pas parler d'orthogonalité.

V.2.2 Exemple
Dans $E = \mathbb{R}^2$, montrer que $F = \text{Vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix})$ et $G = \text{Vect}(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix})$ sont supplémentaires.

Calculer l'expression de la projection sur F parallèlement à G.

V.2.3 Proposition
Soit E un $\mathbb{K}$-ev et p un projecteur sur F de direction G.
Alors $p \in \mathcal{L}(E)$, $p^2 = p$, $\ker p = G$ et $\operatorname{Im} p = F = \ker(Id_E - p)$.

Preuve.

- Montrons que p est linéaire. Soient $x, y \in E$ que l'on écrit de manière unique comme $x = x_F + x_G$ et $y = y_F + y_G$. Alors $p(x) = x_H$ et $p(y) = y_H$.
  Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. On a $\alpha x + \beta y = \alpha x_F + \beta y_F + \alpha x_G + \beta y_G$. Par unicité de la décomposition on a $p(\alpha x + \beta y) = \alpha p(x) + \beta p(y)$.
- On a immédiatement pour tout $x \in E$ que $p(x) \in F$ donc $p(x) = p(x) + 0_E$ est sa décomposition. Donc $p(p(x)) = p(x)$.
- Par définition $\operatorname{Im} p \subset F$ et $F \subset \{x \in E | p(x) = x\}$. Mais ce dernier ensemble est clairement inclus dans $\operatorname{Im} p$ car il contient les x qui sont eux même leur antécédent par p (donc qui en admettent au moins un).
  Finalement $\operatorname{Im} p = F$ et l'égalité $\ker(id - p) = \{x \in E | x - p(x) = 0\}$ est juste la définition du noyau.
- Soit $x \in E$. $p(x) = 0 \iff x = 0_E + x_G$ avec $x_G \in G$ donc $\ker p = G$. ∎

V.2.4 Théorème
Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $f : E \to E$. f est un projecteur de E ssi f est linéaire et $f^2 = f$. Dans ce cas $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$ sont supplémentaires et f est le projecteur sur $\operatorname{Im} f$ parallèlement à $\ker f$.

Preuve.
On fait la preuve en dimension finie.

On suppose $f \in \mathcal{L}(E)$ et $f^2 = f$. On va montrer que $\ker f \oplus \ker(f - id_E) = E$.

- On a déjà d'après le théorème du rang, $\dim E = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f$.
- De plus $f^2 - f = 0$ ou encore $(f - id_E) \circ f = 0$. Ainsi $\operatorname{Im} f \subset \ker(f - id_E)$ et donc $\dim(\ker(f - id_E)) \geqslant \operatorname{rg} f$.
- Si $x \in \ker f \cap \ker(f - id_E)$ alors $f(x) = 0_E$ et $f(x) = x$ donc $x = 0$.
- D'après le théorème de Grassman $\dim(\ker f + \ker(f - id_E)) = \dim \ker f + \dim(\ker f - id_E) \leqslant \dim(E)$ car c'est un sev de E.

Finalement $\operatorname{rg}(f) = \dim(\ker(f - id_E))$ et donc $\operatorname{Im} f = \ker(f - id_E)$ et cet espace est un supplémentaire de $\ker f$.

Si maintenant $x \in E$ on a $x = x_K + x_i$ et $f(x) = 0_E + f(x_i) = x_i$. Ainsi f est bien la projection sur $\operatorname{Im} f$ parallèlement à $\ker f$. ∎

V.2.5 Exemple
Montrer que $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} \frac{x+y}{2} \\ \frac{x+y}{2} \end{pmatrix} \end{cases}$ est un projecteur trouver ses éléments caractéristiques.

V.3 Symétries

V.3.1 Définition
Soit E un $\mathbb{K}$-ev. Soient également F, G deux sev supplémentaires. Tout $x \in E$ s'écrit donc de manière unique comme $x_F + x_G$ avec $x_F \in F$ et $x'_G \in G$.

L'application qui à x associe $x_F - x_G$ est appelé symétrie par rapport à F parallèlement à G (ou de direction G).

V.3.2 M-Remarque

Si p est la projection sur F parallèlement à G et s la symétrie par rapport à F dans la direction G, on a $p(x) = x_F$ et $s(x) = x_F - x_G$. Alors $s(x) = 2p(x) - x$ et donc $s = 2p - id_E$.

Ainsi $p = \frac{s + id_E}{2}$.

V.3.3 Exemple
Dans $\mathbb{R}_2[X]$, déterminer la symétrie par rapport à $F = \operatorname{Vect}(X - 1, X - 2)$ dans la direction $G = \operatorname{Vect}(X^2 + 1)$.

V.3.4 Proposition
Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $F \oplus G = E$. On note s la symétrie par rapport F de direction G.

Alors $s \in GL(E)$ et $s^2 = Id_E$ ie. $s = s^{-1}$. De plus $F = \ker(s - Id_E) = \{x \in E |\ s(x) = x\}$ et $G = \ker(s + Id) = \{x \in E |\ s(x) = -x\}$.

Preuve.
Il suffit de remarquer que $s = 2p - Id_E$ pour prouver la linéarité (une cl d'al est encore une al). La même formule prouve aisément que $s^2 = Id$ et donc $s \in GL(E)$ et $s^{-1} = s$. On voit aussi que $s - Id = 2(p - Id)$ donc possède le même noyau que $p - Id$, c'est à dire F. De même que $\ker(s + Id) = \ker(2p) = \ker(p) = G$. ∎

V.3.5 Théorème
Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $f : E \to E$.

Alors s est une symétrie ssi f est linéaire et $f^2 = Id_E$.

C'est alors la symétrie par rapport à $\ker(f - Id_E)$ parallèlement à $\ker(f + Id_E)$ qui sont donc supplémentaires dans E.

Preuve.
On suppose $f \in \mathcal{L}(E)$ et $f^2 = id_E$. On pose $p = \frac{f + id_E}{2}$. Alors $f = 2p - id_E$ et on a clairement $p \in \mathcal{L}(E)$ car p est une combinaison linéaire d'al.

De plus $p^2 = \left(\frac{f+id_E}{2}\right)^2$ et comme f et id_E commutent, on peut appliquer le théorème du binôme de Newton : $p^2 = \frac{1}{4}(f^2 + 2f \circ id_E + id_e^2) = \frac{1}{4}(id_E + 2f + id_E) = \frac{f+id_E}{2} = p$.

Donc p est un projecteur d'après le théorème V.2.4. Donc f est la symétrie associée à p, c'est à dire la symétrie par rapport à $\mathrm{Im}(p) = \ker(p - id_E) = \ker(\frac{f - id_E}{2}) = \ker(f - id_E)$ dans la direction $\ker p = \ker(\frac{f+id_E}{2}) = \ker(f + id_E)$. ∎

V.3.6 Exemple
Dans $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ l'application qui à une fonction f associe $x \mapsto f(-x)$ est une symétrie. C'est la symétrie par rapport aux fonctions paire parallèlement aux fonctions impaires.

V.3.7 Théorème (Lien projecteur/symétrie)
Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $E = F \oplus G$. On note p la projection sur F parallèlement à G et p' la projection sur G parallèlement à F. De même on note s la symétrie sur F parallèlement à G et s' la symétrie sur G parallèlement à F. Alors

$$p + p' = Id_E,\ \ p \circ p' = p' \circ p = 0$$

$$s + s' = O,\ \ s \circ s' = s' \circ s = -Id_E$$

$$s = 2p - Id \text{ et } s' = 2p' - Id$$

Preuve.
Il suffit d'écrire $x = x_F + x_G$ et les formules en découle facilement. ∎

V.3.8 Explications

On pourra retrouver facilement ces formules à partir des définitions qu'on retrouve à partir des dessins.