Devoir surveillé n°7

Durée : 4H. Calculatrices interdites. **Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction et la propreté : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.**
Lisez l'énoncé attentivement et en entier **AVANT** de commencer le devoir.

Exercice 1 (Cours)

1. Calculer l'image de la fonction $f : x \mapsto xe^{-x}$ définie sur $\mathbb{R}$. En justifiant...
2. Donner 4 conditions nécessaires et suffisantes pour que $A \in \mathcal{M}_(3)(\mathbb{R})$ soit inversible.
3. Donner une équation du plan (dans $\mathbb{R}^3$) $P = \text{Vect}(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix})$.
4. Citer le théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice 2
On pose $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré 2 ou moins. On définit également la famille $\mathcal{F} = (P_1, P_2, P_3, P_4) = (X - 1,\ 2X^2 + X - 2,\ X^2 - 2X + 1,\ -2X^2 + 2X - 1)$ de vecteurs de E.

1. **Montrer** que E est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace $\mathbb{R}[X]$.
2. Donner une base et la dimension de E.
3. Calculer la matrice M de la famille $\mathcal{F}$ dans la base canonique de E.
4. La famille $\mathcal{F}$ est-elle libre ? génératrice de E ?
5. On pose $F = \text{Vect}(P_1, P_2)$, $G = \text{Vect}(P_3, P_4)$ et $D = \text{Vect}(P_3)$. Calculer les dimensions de ces espaces.
6. Montrer que $\mathbb{R}_2[X] = F \oplus D$.
7. Soit $P = aX^2 + bX + c$ un polynôme de E. Trouver α, β, γ tels que $P = \alpha P_1 + \beta P_2 + \gamma P_3$. Qu'avons nous en fait calculé ?
8. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur (α, β, γ) puis sur (a, b, c) pour que $P \in F$. Nous avons trouvé une équation de F !
9. Montrer que $P_4 \in F$.
10. En déduire $F + G$ et $F \cap G$.

Exercice 3
On souhaite étudier une suite récurrente.

Partie I

On étudie d'abord la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R}_+^* \\ x & \mapsto & x^{\frac{1}{x}} \end{cases}$

1. Justifier le fait que $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}_+^*)$.
2. Montrer que l'on peut prolonger f par continuité en 0. On note encore f la fonction ainsi prolongée et définie sur $\mathbb{R}^+$.
3. Etudier les variations de f et donner un tableau comportant les limites aux bornes.
4. f est-elle dérivable en 0 ? Préciser l'éventuelle tangente.
5. Décrire les éventuelles asymptotes de la courbe représentative de f.
6. Tracer.
7. Montrer que f est une bijection de $]0, e]$ dans un intervalle à préciser.

Partie II

Soit $a \geqslant 1$. On pose $\varphi : t \mapsto a^t$ et on définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la manière suivante : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N} u_{n+1} = \varphi(u_n)$. Le but de cette partie est d'étudier la convergence de la suite $(u_n)_n$. Lorsque $(u_n)_n$ converge, on note $h(a)$ sa limite.

1. Que peut-on dire de $(u_n)_n$ quand $a = 1$?
2. Montrer que si $h(a)$ existe, alors $h(a) = \varphi(h(a))$.
3. En déduire que dans ce cas $f(h(a)) = a$.
4. Montrer que si $a > 1$, alors φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

5. Pour $a > 1$, montrer par récurrence que $u_n < u_{n+1}$ pour tout n.
6. On suppose maintenant $a \in]1, e^{\frac{1}{e}}]$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} u_n \leqslant e$. Qu'en déduire pour la suite (u_n) ?
7. Si $a > e^{\frac{1}{e}}$, montrer que $u_n \underset{n\to\infty}{\to} +\infty$. On pourra faire un raisonnement par l'absurde et utiliser la partie I et la question II.2.

Exercice 4
Dans cet exercice, on note $C = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ et $\mathcal{B}_c = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

De plus on pose C_1, C_2, C_3 les 3 colonnes de C. On considère les ensembles $F = \{X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 |\ CX = 0_{\mathbb{R}^3}\}$ et $G = \mathrm{Vect}(C_1, C_2, C_3)$

Partie I

1. Calculer $\det(C)$. Qu'en déduire pour C ?
2. Montrer que F est un espace vectoriel et en calculer une base $\mathcal{B}_1$.
3. Calculer le rang de C. Quel est le lien avec la dimension précédente ?
4. Donner la dimension de G puis une base $\mathcal{B}_2$ de G.
5. Exhiber une combinaison linéaire à coefficients non tous nuls de C_1, C_2, C_3.
6. On note $\mathcal{B} = (u, v, w)$ la famille constituée des vecteurs de $\mathcal{B}_1$ puis ceux de $\mathcal{B}_2$. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base.
7. Qu'en déduire pour les espaces F et G ?

Partie II

1. On pose $Q = \frac{1}{9}C$. Calculer Q^2.
2. En déduire une expression de C^n pour **tout** $n \in \mathbb{N}$.
3. On pose $S = 2Q - I_3$. Déduire de la question 1 la valeur de S^2.
4. Soit $X \in G$. Montrer que $QX = X$.
5. Que vaut QX pour $X \in F$?
6. Montrer que F et G sont orthogonaux.
7. Quelle est l'interprétation géométrique de $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ X & \mapsto & QX \end{array} \right.$?
8. Même question pour $X \mapsto SX$.

Exercice 5
Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $\Delta_n : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & P(X+1) - P(X) \end{array} \right.$. On pose $E = \mathbb{R}_n[X]$

On cherche à calculer des sommes classiques par une méthode générale.

Partie I

1. Montrer que si $P \in E$ alors $\Delta_n(P) \in E$.
2. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $P_1, P_2 \in E$. Montrer que $\Delta_n(\alpha P_1 + \beta P_2) = \alpha \Delta_n(P_1) + \beta \Delta_n(P_2)$.
3. Question bonus : quelle méthode classique nous permet alors de prouver que pour $(\alpha_i)_{i \in [\![1,n]\!]} \in \mathbb{R}^n$ et $P_1, \dots P_n \in E$ on a
$$\Delta_n \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_i P_i \right) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_i \Delta_n(P_i)?$$
On ne demande pas la preuve mais seulement l'explication de la méthode.
4. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\Delta_n(P) = 0$. On suppose que P possède une racine réelle ou complexe. Montrer que $P = 0$.
5. Montrer que $F = \{P \in E |\ \Delta_n(P) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de E et en donner une base.
6. En quoi la dimension de F permet de conclure sur l'injectivité de Δ_n ?
7. Dans cette question seulement on prend $n = 3$.
   (a) Rappeler la base canonique ainsi que la dimension de $\mathbb{R}_3[X]$.

(b) Donner la matrice de la famille $\mathcal{F} = (\Delta_3(P_i))_{i\in[\![0,3]\!]}$ dans la base canonique (P_0, P_1, P_2, P_3) de $E = \mathbb{R}_3[X]$.

(c) Calculer $\text{Vect}(\mathcal{F})$.

(d) Montrer qu'il existe un unique $Q \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que $\Delta_3(Q) = X^2$ et $Q(1) = 0$. Exhiber ce polynôme.

(e) Pour $k \in \mathbb{N}$, exprimer k^2 grâce à Q. En déduire la valeur de $\sum_{k=1}^{N} k^2$ pour $N \in \mathbb{N}$.

Partie II

Pour généraliser la méthode précédente, nous introduisons une famille de polynômes.

1. On pose $B_k(X) = \frac{X(X-1)\dots(X-k+1)}{k!} = \frac{1}{k!}\prod_{i=0}^{k-1}(X-i)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Par convention, $B_0 = 1$. Donner le degré et le coefficient dominant de B_k.
2. Donner les coefficients de B_1, B_2, B_3.
3. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, $B_k(n) = \binom{n}{k}$.
4. Montrer que $B_k(X) + B_{k+1}(X) = B_{k+1}(X+1)$.
5. On prend $0 \leqslant k < n$. Calculer $\Delta_n(B_{k+1})$ en fonction des B_i, $i \in [\![0, k]\!]$.
6. Montrer que B_0, B_1, B_2, B_3 est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
7. Justifier rapidement que $(B_0, \dots, B_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
8. On note $\mathcal{B} = (B_0, \dots, B_n)$. Calculer $\text{Mat}_{\mathcal{B}}((\Delta_n(B_i))_{i\in[\![0,n]\!]})$.
9. On va calculer $\sum_{k=1}^{N} k^3$.

   (a) Vérifier que $X^3 = B_1 + 6B_2 + 6B_3$.

   (b) En déduire un polynôme Q_3 tel que $\Delta_4(Q_3) = X^3$ et $Q_3(1) = 0$

   (c) Exprimer la somme cherchée en fonction de Q_3 puis la calculer.