Complément sur les fonctions continues

Théorème 1
Soient $a < b$ deux réels et f une fonction continue sur le segment $[a, b]$. Alors $f([a, b])$ est un segment, ou encore f est bornée et atteint ses bornes.

Pour prouver ceci (et toute la suite d'ailleurs) nous aurons besoin du fameux

Théorème 2 (Bolzano-Weierstrass)
De toute suite bornée de nombres réels on peut extraire une suite convergente.

Preuve.
C'est une conséquence directe du Lemme des pics, que nous allons prouver maintenant. ■

Extraire une suite

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Une suite extraite de (u_n) est une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la forme $\forall n \in \mathbb{N}\ v_n = u_{\varphi(n)}$ où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante.

Ainsi extraire une suite de (u_n) (construire (v_n)) revient à trouver une suite d'**indices** strictement croissante.

Lemme 1 (Lemme des pics)
Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Alors on peut extraire de $(u_n)_n$ une suite $(v_n) = (u_{\varphi(n)})$ qui soit monotone.

Preuve.
L'idée graphique est la suivante : on dessine les points de la suites (le graphe de cette fonction) et chaque naturel n est associé à une "hauteur" u_n. Si on imagine un soleil levant (depuis l'est, donc vers $+\infty$ pour n), alors nos points peuvent être éclairé ou non suivant qu'il y a des points plus haut "après".

Posons $E = \{n \in \mathbb{N} |\ \forall p > n\ x_n > x_p\}$ et $O = \{n \in \mathbb{N} |\ \exists p > n\ x_n \leqslant x_p\} = \mathbb{N} - E$ (respectivement l'ensemble des indices des points éclairés et ceux des points dans l'ombre). Deux cas se présentent.

— Si E est infini, on note $\varphi(n)$ le $n$ième nombre de E (considéré dans l'ordre croissant) et par définition de E la suite $(u_{\varphi(n)})$ est strictement décroissante.
En effet, pour $n \in \mathbb{N}$ on a $\varphi(n) \in E$ et $\varphi(n+1) > \varphi(n)$ donc $u_{\varphi(n)} > u_{\varphi(n+1)}$.

— Si E est fini, alors il est majoré par un $N \in \mathbb{N}$ et tout $n > N$ est dans O. Notons $\varphi(0) = N + 1 \notin E$. Donc il existe $p_1 > \varphi(0)$ tel que $x_{p_1} \geqslant x_{\varphi(0)}$ (calculer la négation de $N + 1 \in E$). On pose $\varphi(1) = p_1$. Comme $p_1 \in O$ (il est strictement plus grand que N), on peut recommencer et définir p_2 tel que $x_{p_2} \geqslant x_{p_1}$ et alors on pose $\varphi(2) = p_2 > \varphi(1)$ et par récurrence on a trouvé une suite extraite croissante (non strictement d'ailleurs). ■

Preuve du théorème 1

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, $f([a, b])$ est un intervalle I. Notons $M = \sup(I) \in \overline{\mathbb{R}}$. Nous devons montrer que $M \in f([a, b])$, c'est à dire trouver $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = M$. Ceci prouvera que M est fini et donc que f est majorée et que son image possède un maximum.

Pour cela construisons une première suite (y_n).

— Si $M = +\infty$, on prend une suite (y_n) à valeurs dans I qui tend vers $+\infty$.

— Si $M \in \mathbb{R}$, alors pour $n \in \mathbb{N}$ on peut trouver $y_n \in I$ tel que $M - y_n < \frac{1}{n+1}$ (c'est à dire $M - \frac{1}{n+1} < y_n \leqslant M$) par caractérisation de la borne supérieure.

Dans tous les cas $y_n \underset{+\infty}{\to} M$ et (y_n) est à valeurs dans I c'est à dire que chaque y_n possède au moins un antécédent par f. Notons x_n un de ces antécédents et nous disposons maintenant d'une suite (x_n) dans $[a, b]$ telle que $f(x_n) = y_n \underset{+\infty}{\to} M$ (par encadrement).

Mais (x_n) est bornée car $\forall n \in \mathbb{N}\ a \leqslant x_n \leqslant b$ et donc nous pouvons en extraire une suite $(x_{\varphi(n)})$ qui converge vers un réel c. De plus, $c \in [a, b]$ par passage à la limite des inégalités larges.

Comme f est continue en c, $f(x_{\varphi(n)}) \underset{+\infty}{\to} f(c)$. Mais nous avons également $f(x_{\varphi(n)}) = y_{\varphi(n)} \underset{+\infty}{\to} M$. Par unicité de la limite , $f(c) = M$ qui est bien un maximum.

De plus, $-f$ possède également un maximum (pour les mêmes raisons) et donc f possède également un minimum et le théorème est prouvé.