I Espace des applications linéaires

I.1 $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$

Définition 1
Soient E, F deux $\mathbb{K}$-ev.

1. *Une application $f : E \to F$ est dite application linéaire si*
$$\forall x, y \in E \; f(x+y) = f(x) + f(y) \text{ et } \forall x \in E \forall \alpha \in \mathbb{K} \; f(\alpha x) = \alpha f(x).$$
Il est équivalent d'imposer $\forall x, y \in E \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \; f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$.
L'ensemble des applications linéaires (ou morphismes de $\mathbb{K}$-ev) est noté $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$ ou $\mathcal{L}(E,F)$ quand le corps de base est sous-entendu.
2. *Un application linéaire de E dans E est appelé endomorphisme linéaire. On note $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$ ou $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes linéaires de E.*
3. *Une application linéaire bijective est appelé isomorphisme linéaire, et un endomorphisme bijectif est appelé automorphisme. L'ensemble des automorphismes de E est noté $GL_{\mathbb{K}}(E)$.*
4. *Une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$ est appelé forme linéaire sur E.*

I.2 Noyau

Définition 2
Soit $f : E \to F$ une application $\mathbb{K}$-linéaire. On appelle noyau de f et on note $\ker f$ l'ensemble $\ker f = \{x \in E | \; f(x) = 0_F\} = f^{-1}(\{0_F\})$.

Proposition 1
Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$. Alors $\ker f$ est un sev de E

Théorème 1
Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$.
f est injective ssi $\ker f = \{0_E\}$.

Proposition 2
Soit E un $\mathbb{K}$ev de dimension finie et $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ une application linéaire.
$$f \text{ est injective } \iff (f(e_1), \dots, f(e_n)) \text{ est libre dans } F$$

I.3 Image

Définition 3
Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. L'image de f et on note $\operatorname{Im} f$ l'ensemble $\operatorname{Im} f = \{f(x) | \; x \in E\}$.

Proposition 3
Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$ et $E = Vect(e_1, \dots, e_n)$. Alors $\operatorname{Im} f = Vect(f(e_1), \dots, f(e_n))$.

Corollaire 1
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension fini Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E.
f est surjective ssi $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est génératrice de F.

I.4 Structure algébrique

Théorème 2
Soient E, F, G des $\mathbb{K}$-ev.

1. *$\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$ est un $\mathbb{K}$-ev avec $0_{\mathcal{L}(E,F)}$ l'application nulle.*
2. *Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$ alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E,G)$.*
3. *Soient $f_1, f_2 \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g_1, g_2 \in \mathcal{L}(F,G)$.*
$$g_1 \circ (f_1 + f_2) = g_1 \circ f_1 + g_1 \circ f_2 \text{ et } (g_1 + g_2) \circ f_1 = g_1 \circ f_1 + g_2 \circ f_1$$

Proposition 4
Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $f, g \in GL(E)$. Alors $f \circ g \in GL(E)$ et $f^{-1} \in GL(E)$.

II Applications linéaires en dimension finie

II.1 Isomorphismes

Proposition 5
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E.
Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. f est un isomorphisme ssi $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une base de F.
En particulier $\dim_{\mathbb{K}} F = n$.

Définition 4
Deux $\mathbb{K}$-ev E et F sont dits isomorphes s'il existe $f \in \mathcal{L}(E,F)$ qui soit un isomorphisme.

Corollaire 2
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n. et F un $\mathbb{K}$-ev.

1. *Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ une application linéaire **injective**. Soit G un sev de E de dimension finie p. Alors $f(G)$ est de dimension finie p.*
2. *E et $\mathbb{K}^n$ sont isomorphes*

3. *E et F sont isomorphes ssi* $\dim(F) = \dim(E)$.

Théorème 3
Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de même dimension n et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
f est injective ssi f est surjective ssi f est bijective.

II.2 Rang

Définition 5
Soient E, F deux $\mathbb{K}$-ev de dimensions finies et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle rang de f et on note $\mathrm{rg}(f)$ la dimension de $\mathrm{Im}\, f$.

Lemme 1
Soient E, F deux $\mathbb{K}$-ev et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Si $\ker f$ admet un supplémentaire H dans E alors $f_{|H} : H \to \mathrm{Im}(f)$ est un isomorphisme de H dans $\mathrm{Im}\, f$.

Théorème 4 (Théorème du rang)
Soient E, F deux $\mathbb{K}$-ev et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Si E est de dimension finie alors

$$\dim E = \dim(\ker f) + \mathrm{rg}(f).$$

Proposition 6
Soient E, F deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. *f est surjective ssi* $\mathrm{rg}\, f = \dim F$.
2. *f est injective ssi* $\mathrm{rg}\, f = \dim E$.
3. *Si $\dim E = \dim F$, f est bijective ssi f est injective ssi f est surjective.*

Proposition 7
Soient E, F deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. *Soit F' un espace vectoriel et $\varphi : F \to F'$ un isomorphisme, alors* $\mathrm{rg}(\varphi \circ f) = \mathrm{rg}\, f$.
2. *Soit E' un $\mathbb{K}$-ev et $\psi : E' \to E$ un isomorphisme, alors* $\mathrm{rg}(f \circ \psi) = \mathrm{rg}\, f$.

III Matrices

III.1 Matrice d'une application linéaire

Définition 6

1. *Soient E, F deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie de dimension respectives p et n. On note $\mathcal{B}_E = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E et $\mathcal{B}_F = (u_1, \ldots, u_n)$ une base de F. Soit également $f \in \mathcal{L}(E, F)$. La matrice de f dans $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ (noté $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f)$) est la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(f(e_1), \ldots, f(e_p)) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.*
   C'est la matrice des coordonnées des $f(e_j)$ dans $u_1, \ldots, u_n$, écrites en colonnes.
2. *Si $f \in \mathcal{L}(E)$, on note* $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_E}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(f) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.

Théorème 5
Soient E, F deux $\mathbb{K}$-ev de dimensions p et n respectivement. Soient $\mathcal{B}_E$ une base de E et $\mathcal{B}_F$ une base de F. Alors $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E, F) & \to & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ f & \mapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f) \end{array} \right.$ est un isomorphisme linéaire.

Corollaire 3
Soit E de dimension p et F de dimension n deux $\mathbb{K}$ev. Alors

$$\dim(\mathcal{L}(E, F)) = np$$

Proposition 8
Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $A = B$ ssi $\forall X \in \mathbb{K}^p\, AX = BX$.

Théorème 6
Soit $f : E \to F$ une application linéaires entre ensembles de dimensions finies de bases respectives $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$. f est un isomorphisme ssi $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f)$ est inversible.

III.2 Produit matriciel

Proposition 9
Soit E, F deux $\mathbb{K}$-ev de dimensions respectives p et n et $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F$ des bases de E et F. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $x \in E$. On note $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f)$ et $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_p \end{pmatrix}$.

Alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(f(x)) = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^p a_{1k} x_k \\ \ldots \\ \sum_{k=1}^p a_{nk} x_k \end{pmatrix} = AX$.

Théorème 7
Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-ev de dimensions respectives q, p, n et de bases $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_q)$, $\mathcal{B}' = (f_1, \ldots, f_p)$, $\mathcal{B}'' = (g_1, \ldots g_n)$. Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$.
On pose de plus $M_f = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $M_g = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}''}(g) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Alors $C = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}''}(g \circ f) = M_g M_f = C \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$

III.3 Changement de base

Théorème 8
Soient E, F deux $\mathbb{K}$-ev $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}'_E$ deux bases de E et $\mathcal{B}_F, \mathcal{B}'_F$ deux bases de F. On note P la matrice de passage de $\mathcal{B}_E$ à $\mathcal{B}'_E$ et Q la matrice de passage de $\mathcal{B}_F$ à $\mathcal{B}'_F$.
Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On pose $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f)$ et $M' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'_E, \mathcal{B}'_F}(f)$. Alors $M' = Q^{-1} M P$