Devoir en temps libre 13

A rendre le 25/05/2017. Les résultats seront soulignés ou encadrés. Vous pouvez rédiger ce devoir à 2.

Exercice 1
On considère la fonction $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}^4 \\ P(X) & \mapsto & (P(-1), P(0), P(1), P'(0)) \end{array} \right.$

Partie I

1. Montrer que φ est une application linéaire.
2. Trouver un polynôme $Q_1 \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que $\varphi(Q_1) = (1,0,0,0)$.
3. Trouver un polynôme $Q_2 \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que $\varphi(Q_2) = (0,1,0,0)$.
4. On note $Q_3(X) = \frac{X^2(1+X)}{2}$ et $Q_4(X) = X(1-X^2)$. Calculer $\varphi(Q_1)$ et $\varphi(Q_2)$.
5. En déduire que (Q_1, Q_2, Q_3, Q_4) est une base de $\mathbb{R}_3[X]$. Quelle est la conséquence pour φ ?

Partie II Dans cette partie on considère $f \in \mathcal{C}^4([-1,1], \mathbb{R})$.

1. Trouver $P_f \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que $\varphi(P_f) = (f(-1), f(0), f(1), f'(0))$. Quel argument nous assure a priori l'existence et l'unicité d'un tel polynôme ?
2. Dans les 4 prochaines questions on **fixe** $x \in]0,1[$ et on pose $A = \frac{f(x)-P_f(x)}{x^2(x^2-1)}$ ainsi que la fonction $\delta : t \mapsto f(t) - P_f(t) - At^2(t^2-1)$ définie sur $[-1,1]$.
   Quelle est la classe de δ ?
3. Justifier que δ s'annule au moins 4 fois (en exhibant les points d'annulation) et trouver un point d'annulation évident de δ'.
4. Montrer que $\delta^{(4)}$ s'annule au moins une fois. On pourra au passage donner un minorant du nombre de point d'annulations de $\delta', \delta'', \delta^{(3)}$.
5. Justifier l'existence de $M = \sup\limits_{t \in [-1,1]} |f^{(4)}(t)|$ et montrer que $|f(x) - P_f(x)| \leqslant \frac{x^2(1-x^2)}{24} M$.
   On **admet** que cette inégalité est encore valable pour tout $x \in [-1,1]$.
6. Soit $k \in \mathbb{N}$. Calculer $\int\limits_{-1}^{1} x^k \mathrm{d}x$ ainsi que $\int\limits_{-1}^{1} x^2(1-x^2)\mathrm{d}x$ et $\int\limits_{-1}^{1} P_f(x)\mathrm{d}x$.
7. En déduire l'inégalité $\left| \int\limits_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x - \frac{f(-1)+4f(0)+f(1)}{3} \right| \leqslant \frac{1}{90} M$.
8. En considérant la fonction $f : x \mapsto x^4$, montrer que cette inégalité peut être une égalité (et donc on ne peut pas espérer trouver une constante plus petite que $\frac{1}{90}$).

Partie III Posons $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Dans cette partie on considère $f \in \mathcal{C}^4([a,b], \mathbb{R})$.

1. Exhiber une fonction affine et bijective $\psi : [-1,1] \to [a,b]$ ainsi qu'une fonction $g : [-1,1] \to \mathbb{R}$ qui prend exactement les mêmes valeurs que f.
2. Montrer l'inégalité $\left| \int\limits_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x - \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)\right) \right| \leqslant \frac{(b-a)^5}{2880} M$ où $M = \sup\limits_{t \in [a,b]} |f^{(4)}(t)|$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. On pose pour $k \in [\![0, 2n]\!] \alpha_k = a + k\frac{b-a}{2n}$. Montrer l'inégalité

$$\left| \int\limits_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x - \frac{b-a}{6} \sum_{k=0}^{n-1} \left(f(x_{2k}) + 4f(x_{2k+1}) + f(x_{2k+2})\right) \right| \leqslant \frac{(b-a)^5}{2880 n^4} M$$

Nous disposons maintenant d'une bonne méthode d'approximation d'intégrales : il suffit de calculer une certaine somme de valeurs de f pour obtenir un résultat proche de l'intégrale exacte (et de plus en plus proche à mesure que n augmente : comparer à la convergence en "$\frac{1}{n}$" de la méthode des rectangles et en "$\frac{1}{n^2}$" de celle des trapèzes, voir le prochain cours sur les intégrales). Utile pour les calculatrices et autres ordinateurs.