Exercice 1
Montrer que $f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (2x+y+z, y+z, x) \end{array}\right.$ *est linéaire. Calculer son noyau et son image. Est-ce un isomorphisme ?*

Exercice 2
Déterminer les rangs des applications après avoir montré quelles sont linéaires :

1. $f_1 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ x+2y \end{pmatrix} \end{cases}$
2. $f_2 : \begin{cases} \mathbb{K}_3[X] \to \mathbb{K}_4[X] \\ P \mapsto X(P'(X) - P'(0)) \end{cases}$
3. $f_3 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto a\cos + b\sin \end{cases}$

Exercice 3
Soit $f : (x,y,z) \mapsto (x+z, y-2x, x+2z)$.

1. *Montrer que* $f \in GL(\mathbb{R}^3)$.
2. *Calculer* f^2, f^3.
3. *Montrer que* $f^3 - 4f^2 + 4f - Id_{\mathbb{R}^3} = 0$ *et en déduire la réciproque de* f.
4. *Factoriser le polynôme* $X^3 - 4X^2 + 4X - 1$ *dans* $\mathbb{R}[X]$. *On note* λ_1, λ_2 *et* λ_3 *ses racines.*
5. *Montrer que* $(f - \lambda_1 Id) \circ (f - \lambda_2 Id) \circ (f - \lambda_3 Id) = 0$ *puis calculer* $\ker(f - \lambda_1 Id)$.
   Que vient-on de calculer ?

Exercice 4
Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *de matrice dans la base canonique* $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. *Trouver les* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tels que* $\lambda Id - f$ *ne soit pas bijective.*
2. *Traduire en terme de noyau l'ensemble des solutions de l'équation* $f(u) = \lambda u$ *d'inconnue* $u \in \mathbb{R}^3$, *pour un* $\lambda \in \mathbb{R}$ *fixé.*
3. *En déduire les* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tels qu'il existe un vecteur non nul* $u \in \mathbb{R}^3$ *tel que* $f(u) = \lambda u$.
4. *Exhiber un* u *pour chaque* λ *ainsi trouvé et prouver qu'ils forment une base* $\mathcal{B}$.
5. *Donner la matrice de* f *dans cette base* $\mathcal{B}$ *et calculer sa puissance* n*-ième.*

Exercice 5
Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. *Montrer que* $\operatorname{rg}(A+B) \leqslant \operatorname{rg} A + \operatorname{rg} B$. *Trouver un exemple d'égalité.*

Exercice 6
Soit E *un* $\mathbb{K}$*-ev de dimension finie et* $f \in \mathcal{L}(E)$. *Montrer l'équivalence des assertions :*

1. $\ker f \oplus \operatorname{Im} f = E$
2. $\ker f^2 = \ker f$
3. $\operatorname{Im} f^2 = \operatorname{Im} f$

Exercice 7
Soit E *un* $\mathbb{C}$*-ev de dimension* 3. *On pose* $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ *une base de* E.
On définit $f \in \mathcal{L}(E)$ *par* $f(e_1) = e_1 + ie_2$, $f(e_2) = -e_1 + e_2 + (1+i)e_3$ *et* $f(e_3) = e_1 + (1+2i)e_2 + (1+i)e_3$.
Calculer $\ker f$ *et* $\operatorname{Im} f$.

Exercice 8
Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X], \mathbb{R}^2)$ *dont la matrice dans les bases canoniques est* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *Déterminer* $\ker f$ *et* $\operatorname{Im} f$.

Exercice 9
On pose $E = \mathbb{R}^3$ *et* $\mathcal{B}_{can} = (e_1, e_2, e_3)$. *Soient* $u = e_1 + e_2 - e_3$, $v = e_1 + e_3$ *et* $w = e_1 - 2e_2 + e_3$.

1. *Montrer que* (u, v, w) *est une base de* E.
2. *Soit* f *l'unique endomorphisme de* E *tel que* $f(u) = 2u - 2v$, $f(v) = u + v + w$ *et* $f(w) = v + w$. *Montrer que* f *est un isomorphisme.*
3. *Donner l'expression de* f *sous la forme* $f : (x,y,z) \mapsto \dots$.

Exercice 10
Soit (e_1, e_2, e_3) *la base canonique de* $\mathbb{R}_2[X]$. *On pose* $\mathcal{B} = (e_1 + 2e_2 + e_3, e_1 + 2e_2 + 2e_3, e_2 + 2e_3)$. *Soit* f *l'endomorphisme canoniquement associé (dans* $\mathbb{R}_2[X]$*) à* $\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 14 & -10 & 4 \\ 16 & -10 & 3 \end{pmatrix}$.
Calculer $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$