Probabilités sur un univers fini

Antoine Louatron

Table des matières

I Espaces probabilisés

I.1 Univers

I.1.1 Définition

On appelle univers l'ensemble des issues (ou résultats possibles) d'une expérience aléatoire. Dans ce cours, on ne considère que des univers finis. On le note souvent Ω.

Un événement est une partie de Ω, qui représente un ensemble d'issues "favorables".

Un événement élémentaire est un événement à un seul élément (un singleton).

I.1.2 Exemple

On considère l'expérience : choisir un élève au hasard dans la classe (en vu de passer au tableau, pourquoi pas).

$\Omega =$ l'ensemble des élèves. Un événement possible est l'ensemble des filles qui correspond au résultat : l'élève choisi est une fille.

Un événement élémentaire représente le résultat : tel élève a été choisi.

Question

Quel est l'ensemble des événements de l'expérience aléatoire étudiée ?

I.1.3 Définition

Soit Ω un univers fini et $A \subset \Omega$ un événement.

1. *On dit que A est l'événement impossible si $A = \emptyset$.*
2. *L'événement contraire de A est le complémentaire de A : $\Omega \backslash A$. On le notera $\overline{A}$.*

I.1.4 Définition

Soient A, B deux événements de l'univers Ω.

1. *L'événement A et B est $A \cap B$.*
2. *L'événement A ou B est $A \cup B$.*
3. *On dit que A et B sont incompatibles ssi $A \cap B = \emptyset$.*

I.1.5 Définition

Soit Ω un univers. On dit que $A_1, \dots, A_n$ est un système complet d'événements ssi $\bigcup_i A_i = \Omega$ et cette réunion est disjointe ie les A_i sont disjoints 2 à 2

I.1.6 Exemple

Si $A \subset \Omega$ alors $A, \overline{A}$ est un système complet d'événements.

I.1.7 Exemple

Si $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ alors les événements élémentaires $\{\omega_1\}, \dots, \{\omega_n\}$ forment un système complet d'événements.

I.2 Probabilité

I.2.1 Définition

Soit Ω un univers. On appelle probabilité sur Ω une fonction P définie sur les événements $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$ qui vérifie pour tout $A, B \subset \Omega$

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

et en plus $P(\Omega) = 1$.

Le couple (Ω, P) est appelé espace probabilisé. On se place maintenant dans le cadre d'un tel espace et on conserve ces notations.

I.2.2 Proposition

$$P(\emptyset) = 0$$

Preuve.

On a clairement $P(\emptyset) + P(\emptyset) = P(\emptyset)$ et donc ce nombre est nul. ∎

I.2.3 Evénements incompatibles

Si les A_i sont des événements 2 à 2 ($i \in [\![1, n]\!]$) incompatibles alors $P(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$.

I.2.4 Théorème
On note $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$. Une probabilité P sur Ω est uniquement déterminée par les nombres $p_i = P(\{\omega_i\})$.

Plus précisément : Soient $p_1, \dots, p_n \in [0, 1]$ tels que $\sum_1^n p_i = 1$. Alors il existe une unique probabilité P telle que $p_i = P(\{\omega_i\})$.

On a alors pour A un événement, $P(A) = \sum_{\omega \in A}(P(\{\omega\}))$.

Preuve.
On se donne n réels positifs de somme 1 et on note $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$.

Rappel : Si A est un sous ensemble de Ω, la fonction indicatrice de E est $1_A : \omega \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } \omega \in A \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

Définissons la fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(\Omega) & \to & [0, 1] \\ A & \mapsto & \sum\limits_{i=1}^n 1_A(\omega_i) p_i \end{array} \right.$ qui est bien une fonction (il n'y a qu'une seule et unique manière de calculer $f(A)$) à valeurs dans $[0, 1]$ car on considère des sommes d'une certaine partie des p_i qui sont positifs et de somme 1.

Montrons que f est une probabilité. Soient A, B deux évenements disjoints. Alors $1_{A \cup B} = 1_A + 1_B$ (considérer les 3 cas disjoints : $\omega \in A$, $\omega \in B$ et $\omega \notin A \cup B$) et donc, par linéarité de la somme, $f(A \cup B) = f(A) + f(B)$. De plus, $f(\Omega) = \sum\limits_{i=1}^n p_i = 1$ par hypothèse. Donc f est bien une probabilité.

Pour l'unicité, il suffit de remarquer que si P est une probabilité vérifiant $P(\omega_i) = p_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ alors $P(A) = f(A)$ pour tout $A \subset \Omega$ (les $\{\omega_i\}$ forment un système d'évenements incompatibles, et donc la probabilité de la réunion est la somme des probabilités). ∎

I.2.5 Exemple
On considère l'expérience aléatoire : lancer un dé à 6 faces. On pose $\Omega = [\![1, 6]\!]$.

On peut poser $P(\{1\}) = \dots = P(\{6\}) = \frac{1}{6}$.

Mais on peut également considérer que le dé est pipé : comment définir une probabilité reflétant le fait que le 1 à deux fois plus de chance d'être tiré que tous les autres.

I.2.6 Définition

1. *Soient A, B deux événements. On dit qu'ils sont équiprobables ssi $P(A) = P(B)$.*
2. *La probabilité P est dite uniforme si tous les événements élémentaires sont équiprobables.*

Explication La probabilité uniforme est en fait la probabilité "par défaut" quand on parle de hasard dans la vie courante. Ce n'est pas forcément la probabilité la mieux adaptée à tous les problèmes.

I.3 Propriétés des probabilités

I.3.1 Proposition
On suppose que P est la probabilité uniforme (comment justifier l'unicité ?). Soit A un événement.

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Preuve.
Encore une fois, il suffit de voir qu'un événement élémentaire à une probabilité de $\frac{1}{\Omega}$ et que A est la réunion disjointe des singletons composés de ses éléments. ∎

Explication

On retrouve la formule classique nb de cas favorable / nb de cas total.

I.3.2 Exemple
On choisit “au hasard” une fonction $f : [\![1,n]\!] \to [\![1,n]\!]$. Quelle est la probabilité pour que f soit une bijection ?

I.3.3 Proposition
Soient A, B deux événements.

1. $P(A \backslash B) = P(A) - P(A \cap B)$
2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
3. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

Preuve.
Remarque : ces propriétés sont triviales pour la probabilité uniforme, ce sont des formules de dénombrement.

Dans le cas général, on observe que $A = (A\backslash B) \cup_d (A \cap B)$ (réunion disjointe) et la définition de P conclut.

Pour la réunion, on observe que $A \cup B = (A\backslash(A \cap B)) \cup_d B$. Et finalement $\Omega = A \cup_d \overline{A}$. ∎

I.3.4 Exemple
$P(\emptyset) = 0$.

I.3.5 Exemple
On tire au hasard (avec remise) 2 cartes dans un jeu de 32 cartes. Exhiber un espace probabilisé et calculer la probabilité de tomber au moins une fois sur un cur.

$\Omega = [\![1,32]\!]^2$ (on considère que l’ordre est important). La probabilité cherchée est $1 - (\frac{24}{32})^2 = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$

I.3.6 Proposition
Soient A, B deux événements. Si $A \subset B$ alors $P(A) \leqslant P(B)$ (croissance)

Preuve.
On a dans ce cas $B = A \cup_d (B\backslash A)$ ∎

II Probabilité conditionnelle

II.1 Conditionner

II.1.1 Définition
Soit B un événement dans Ω tel que $P(B) > 0$ (ie $P(B) \neq 0$).

Pour tout événement A on appelle probabilité conditionnelle de A sachant B le nombre $\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ et on la note $P(A|B)$ ou $P_B(A)$

II.1.2 Intuitivement

Quand on dit probabilité de A sachant B, on suppose d’une certaine manière que l’événement B est réalisé. Ainsi l’univers se réduit à B. Si on cherche la probabilité uniforme de A sachant B, on obtient alors $\frac{|A\cap B|}{|B|}$. De plus, $P(A \cap B) = \frac{|A\cap B|}{|\Omega|}$ et $P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|}$ et on remarque immédiatement que $\frac{|A\cap B|}{|B|} = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$.

Calculer une probabilité conditionnelle, c’est en fait donner plus d’information sur l’expérience aléatoire : on sait déjà que B est réalisé et donc l’univers devient B.

II.1.3 Théorème
L’application $P_B : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{P}(\Omega)) & \to & [0,1] \\ A & \mapsto & P(A|B) \end{array} \right.$ *est une probabilité qui vérifie en plus $P_B(B) = 1$.*

Preuve.
On a bien $P_B(\Omega) = \frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$.

Soient A_1, A_2 deux événements incompatibles, ie $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Montrons que $P_B(A_1 \cup_d A_2) = P_B(A_1) + P_B(A_2)$. Or $P_B(A_1 \cup_d A_2) = \frac{P((A_1 \cup A_2) \cap B)}{P(B)}$.

De plus $(A_1 \cup_d A_2) \cap B = (A_1 \cap B) \cup_d (A_2 \cap B)$. Ainsi $P((A_1 \cup_d A_2) \cap B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B)$. CQFD.■

II.1.4 Exemple
On tire 2 cartes sans remise dans un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité de tirer au moins un trèfle ?

On peut répondre à l'aide de probabilité conditionnelle. On note T_1 l'événement "la première carte n'est pas un trèfle" et T_2 l'événement "la deuxième carte n'est pas un trèfle".

Alors $P(T_1) = \frac{3}{4}$ et $P_{T_1}(T_2) = \frac{23}{32}$. Finalement $P(T_1 \cap T_2) = P(T_1)P_{T_1}(T_2) = \frac{69}{128}$.

La probabilité cherchée vaut $1 - \frac{69}{128} = \frac{59}{128}$.

II.2 Propriétés des probabilités conditionnelles

II.2.1 Rappel

Si $P(B > 0)$, on peut récrire la définition de la probabilité sachant B sous la forme $P(A \cap B) = P(B)P_B(A)$.

Et pour l'intersection de 3 événements ? On note C un troisième événement et on suppose que $P(B \cap C) \neq 0$ (sinon $A \cap B \cap C \subset B \cap C$ et cet événement est donc de probabilité nulle par croissance)

On a alors $P(A \cap (B \cap C)) = P(B \cap C)P_{B \cap C}(A) = P(C)P_C(B)P_{B \cap C}(A)$. Cette formule possède un interprétation intuitive : pour que A, B, C soient réalisé simultanément, il faut d'abord que C soit réalisé, puis que B le soit aussi (sachant que C l'est déjà) et enfin que A le soit (sachant que B et C le sont).

II.2.2 Théorème (Formule des probabilités composées)
On considère $A_1, \dots, A_n$ des événements tels que $P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0$ (ie on a pris $n \geqslant 2$).

Alors
$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \dots P_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

Preuve.
On a déjà pour $n = 2$, $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)$ quand $P(A_1) > 0$ par définition de P_{A_1}.

On suppose la formule vraie pour $n \geqslant 2$. Soient $A_1, \dots, A_{n+1}$ des événements tels que $P(\bigcap_1^n A_i) > 0$. On a alors $P(\bigcap_1^{n+1} A_i) = P((\bigcap_1^n) \cap A_{n+1}) = P(\bigcap_1^n A_i)P_{\bigcap_1^n A_i}(A_{n+1})$. L'hypothèse de récurrence conclut.

Finalement, par récurrence, la formule à démontrer est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. ■

II.2.3 Exemple
On choisit au hasard sans remise $k < 43$ élèves dans une classe de 43 pour passer au tableau (on équilibre les croix...). Calculer pour un élève fixé la probabilité de ne PAS passer au tableau. Pour quelle valeur de k cette probabilité est $< \frac{1}{2}$? $< \frac{1}{10}$?.

On note A_i l'événement : l'élève n'est pas choisit pour l'exercice numéro i. $P(A_1) = \frac{42}{43}$. Pour $i \geqslant 2$, $P_{A_1 \cap \dots \cap A_{i-1}}(A_i) = \frac{43-i}{43}$.

Finalement, la probabilité demandée est $p = \prod_{i=1}^k \frac{43-i}{43} = \frac{43!}{(43-k)!} \frac{1}{43^k}$.

II.2.4 Théorème (Formule des probabilités totales)
Soit $(A_1, \dots, A_n)$ un système complet dévénement de probabilités toutes non nulle. Soit B un événement. Alors $P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P_{A_i}(B)$.

En particulier, si $P(A) \in]0,1[$, alors $P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|\overline{A})P(\overline{A})$.

Preuve.
Les événements $B \cap A_i$ sont incompatibles 2 à 2 car les A_i le sont. De plus, $\bigcup_1^n (B \cap A_i) = B \cap (\bigcup_1^n A_i) = B \cap \Omega = B$.

Ainsi $P(B) = \sum_1^n P(B \cap A_i)$ et la formule précédente appliquée à $n = 2$ conclut. ■

II.2.5 Exemple
On choisit deux élèves dans notre même classe (6 filles, 37 garçons) (sans remise). Avec quelle probabilité le deuxième nom tiré est-t-il celui d'une fille ?

Idée de résolution : poser deux événements F_1 et F_2 qui correspondent à "une fille est choisie au ième tirage". Calcul de $P(F_1)$, $P(F_2|F_1)$ et $P(F_2|\overline{F_1})$.

II.2.6 Théorème (Formule de Bayes)
Soit B un événement tel que $P(B) > 0$.

1. *Soit A un événement tel que $P(A) > 0$. $P_B(A) = \frac{P_A(B)P(A)}{P(B)}$.*
2. *Soit $(A_1, \ldots, A_n)$ un système complet dévénements de probabilités toutes non nulle.*

$$P_B(A_i) = \frac{P_{A_i}(B)P(A_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n} P_{A_j}(B)P(A_j)}$$

Preuve.
Il s'agit d'un simple quotient des définitions de $P_A(B)$ et $P_B(A)$. On applique ensuite la formule des probabilités totales à $P(B)$. ■

II.2.7 Remarque

Terminologie : $P(A_i)$ est qualifiée de probabilité a priori, $P_B(A_i)$ de probabilité à posteriori. On ajoute en fait le l'information : B est réalisé. La formule de Bayes permet de quantifier l'information ajoutée. C'est une formule de révision des croyances.

On peut également voir cette formule comme une quantification de la cause connaissant la conséquence.

II.2.8 Cas particulier

On prend $A, \overline{A}$ comme système complet dévénements :

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|\overline{A})P(\overline{A})}$$

II.2.9 Exemple
Test de dépistage.

Une maladie rare touche en moyenne 1 personne sur 10 000. Un laboratoire met au point un test de dépistage qui a les caractéristiques suivantes :

— Si une personne est malade, le test est positif à 99%.

— Si une personne n'est pas malade, le test est positif à 0.1% (faux positif).

On se demande quelle est la probabilité pour qu'une personne soit malade quand le test est positif.

On pose M l'événement : la personne est malade et T l'événement "le test est positif".

On connaît $P(T|M) = \frac{99}{100}$. On cherche $P(M|T) = \frac{P(T|M)P(M)}{P(T)}$

où $P(T) = P(T|M)P(M) + P(T|\overline{M})P(\overline{M}) = \frac{99}{100} \times 10^{-4} + 10^{-3} \times \frac{9999}{10000}$. Finalement

$$P(M|T) = \frac{99}{100} \times 10^{-4} \times \frac{1}{99 \times 10^{-6} + 9999 \times 10^{-7}} \approx 0.09$$

En fait, la probabilité que le test soit positif est relativement élevée car même si le nombre de faux positif est faible, la population sujette à ces faux positifs est en écrasante majorité. Vu autrement : les quelques tests positifs viennent plus des faux positifs que des malades, ceux-ci étant en très faible minorité.

II.3 Evénements indépendants

II.3.1 Définition
Soient A, B deux événements. On dit que A et B sont indépendants ssi $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

II.3.2 Lien avec les probas conditionnelles

Si on suppose $P(B) > 0$, la condition A et B sont indépendants devient $P(A) = P_B(A)$. La réalisation de A ne dépend pas de celle de B.

II.3.3 Exemple
Est-ce que A est indépendant de lui même ?

II.3.4 Définition
Soient $A_1, \ldots, A_n$ des événements. On dit qu'ils sont mutuellement indépendants ssi

$$\forall I \subset [\![1, n]\!] P(\bigcap_{i \in I} A_i) = \prod_{i \in I} P(A_i)$$

II.3.5 ATTENTION

Des événements mutuellement indépendants sont indépendants deux à deux par définition. Le réciproque est fausse comme le montre un contre-exemple. On prend $\Omega = [\![1, 4]\!]$, $A = \{1, 2\}, B = \{1, 3\}$ et $C = \{2, 3\}$. Montrer que ces événements sont indépendants 2 à 2 mais pas mutuellement indépendants.

II.3.6 Théorème
Soient $A_1, \ldots, A_n$ des événements mutuellement indépendants. On pose $B_i = A_i$ ou $B_i = \overline{A_i}$. Alors $B_1, \ldots, B_n$ sont mutuellement indépendants.

II.3.7 Remarque

En pratique, on donnera souvent des événements considérés comme indépendant mutuellement a priori, puis on fera des calculs. Montrer que n événements sont mutuellement indépendants consiste à faire une preuve valable pour toute partie I de $[\![1, n]\!]$, c'est à dire à considérer $2^n - n - 1$ cas (on enlève l'ensemble vide ainsi que les singletons).

L'indépendance 2 à 2 consiste à ne considérer que $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ cas : les paires d'ensembles.