I Somme d'une série

I.1 Vocabulaire

Définition 1
Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite.

On appelle série de terme général u_n et on note $\sum u_n$ ou $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ la suite (S_N) définie par

$$\forall N \in \mathbb{N}\ S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n$$

On dit que S_N (le nombre) est la Nième somme partielle de cette série.

Il est possible de commencer à sommer non pas à l'indice 0 mais à un indice entier fixé n_0 (ce qui revient à considérer que les premiers termes sont nuls). Dans ce cas la série est notée $\sum\limits_{n\geqslant n_0} u_n$.

Définition 2
Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On dit que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge ssi la suite des somme partielles converge.

Quand elle existe, on note $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ la limite des sommes partielles et on l'appelle somme de la série.

Définition 3
Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ une série à valeurs complexes convergente de limite $\ell \in \mathbb{C}$. On peut alors poser pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_n = \ell - S_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k$. C'est le reste d'ordre n de cette série.

I.2 Lien avec les suites

Proposition 1
Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

***SI** la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge **ALORS** $u_n \underset{+\infty}{\to} 0$*

Définition 4
On dit que la série $\sum u_n$ diverge grossièrement quand $u_n \not\to 0$.

Dans ce cas, d'après la proposition précédente, $\sum u_n$ diverge (ie ne converge pas).

Proposition 2
Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. La suite (u_n) converge ssi la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge.

Dans ce cas $\sum\limits_{0}^{+\infty} (u_{n+1} - u_n) = \lim\limits_{+\infty} u_n - u_0$.

I.3 Opérations sur les séries

Proposition 3
Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Si $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge alors $\sum\limits_{n\geqslant 0} \lambda u_n$ converge et $\sum\limits_{0}^{\infty} \lambda u_n = \lambda \sum\limits_{0}^{\infty} u_n$.

Proposition 4
Soient $(u_n), (v_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Si $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ convergent alors $\sum\limits_{n\geqslant 0} (u_n + v_n)$ converge et $\sum\limits_{0}^{\infty} (u_n + v_n) = \sum\limits_{0}^{\infty} u_n + \sum\limits_{0}^{\infty} v_n$.

Proposition 5
Si $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge et $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ diverge alors $\sum\limits_{n\geqslant 0} (u_n + v_n)$ diverge.

II Séries de nombres positifs

II.1 Généralités

Proposition 6
Soit (u_n) une suite réelle positive. Alors la suite des sommes partielles de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ possède toujours une limite.

De plus elle converge ssi elle est majorée.

II.2 Utilisation de fonctions monotones

Théorème 1
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$.

II.3 Comparaisons

Théorème 2
*Soient u, v deux suites réelles **positives**.*

SI $\forall n \in \mathbb{N} u_n \leqslant v_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ converge alors $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge et $\sum\limits_{0}^{\infty} u_n \leqslant \sum\limits_{0}^{\infty} v_n$.

Réciproquement, si $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ diverge (tend vers $+\infty$, on est dans le cas des séries à termes positifs) alors $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ diverge.

Corollaire 1
Soient u, v deux suites réelles positives.

SI $u_n \leqslant v_n$ APCR et $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ converge alors $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge.

Cette fois, on ne peut plus comparer les sommes.

Définition 5
Soient $(u_n), (v_n)$ deux suites réelles ou complexes. On dit que (u_n) est dominée par (v_n) ssi il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que $|u_n| \leqslant M|v_n|$ (à partir d'un certain rang éventuellement). On note $u_n = O_{+\infty}(v_n)$

Quand (v_n) ne s'annule pas, il revient au même d'imposer $\left(\left|\frac{u_n}{v_n}\right|\right)$ est bornée.

Théorème 3
*Soient u, v deux suites réelles **positives**.*

Si $u_n = O_{+\infty}(v_n)$ et si $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ converge alors $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge

Corollaire 2
*Soient u, v deux suites réelles **positives**.*

Si $u_n = o_{+\infty}(v_n)$ et si $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ converge alors $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge

Corollaire 3
*Soient u, v deux suites réelles **positives**.*

Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} (v_n)$ alors $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge ssi $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ converge.

Proposition 7
Soit (u_n) une suite STRICTEMENT POSITIVE. Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{+\infty}{\to} l < 1$ alors $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge.

Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{+\infty}{\to} l > 1$ alors $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ diverge vers $+\infty$.

III Absolue convergence

III.1 Série complexes

Définition 6
Soit $\sum u_n$ une série complexe. On dit que cette série est absolument convergente ssi $\sum\limits_{n\geqslant 0} |u_n|$ converge (prononcer module ou valeur absolue suivant les cas).

Théorème 4
Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Si $\sum u_n$ converge absolument alors $\sum u_n$ converge.

III.2 Exemples et contres-exemples