Exercice 1

Etudier la convergence et calculer la somme des séries de terme général :

1. $\frac{1}{n!}$. *On admet que la somme vaut e.*
2. $\frac{n^2}{n!}$
3. $\frac{1}{n(n+1)}$.
4. $\frac{3n+2}{n(n^2-1)}$.

Exercice 2

Soit $x > 0$.

1. *Calculer les sommes partielles et étudier la convergence de $\sum x^n$.*
2. *Même question avec $\sum nx^{n-1}$.*
3. *Calculer $\sum \frac{2n+1}{5^n}$.*

Exercice 3

Etudier la nature (convergente ou divergente) des séries de terme général suivant :

1. $\frac{2n}{2^n+n}$
2. $\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$.
3. $\frac{a^n}{a^{2n}+1}$, $a > 0$.
4. $\ln(1 + \frac{(-1)^n}{n^2})$.
5. $\frac{(n!)^2}{(2n)!}$
6. $\frac{n^2\ln(n)}{e^n}$
7. $(\ln(n))^{-\ln(n)}$
8. $\frac{1}{\sqrt{n^3+n+2}}$
9. $e^{-\sqrt{n}}$

Exercice 4 (Séries de Bertrand)

1. *Soit $\beta > 0$. En comparant à une intégrale, déterminer la nature de $\sum \frac{1}{n\ln(n)^\beta}$.*
   Attention au cas $\beta = 1$.
2. *Soit $\alpha \in]0,1[$. Déterminer la nature de $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$.*
3. *Conclure sur la nature de $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$ suivant les valeurs de $\alpha, \beta > 0$.*

Exercice 5

Soit $(u_n), (v_n)$ des termes généraux positifs de séries convergentes.

1. *Etudier les séries de terme général u_n^2, $\frac{u_n}{1+u_n}$.*
2. *Montrer que $\sum \sqrt{u_n v_n}$ converge en utilisant l'inégalité arithmético-géometrique...*
3. *Etudier la nature de $\sum \frac{\sqrt{u_n}}{n}$*

Exercice 6

1. *Soit $\gamma > 0$. On pose pour $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, $v_n = \frac{1}{n^\gamma}$. Donner un développement à 2 termes de $\frac{v_{n+1}}{v_n}$.*
2. *Soit $\alpha > 1$ et (u_n) une suite strictement positive qui vérifie $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$.*
   (a) *Montrer que pour tout $\beta < \alpha$, la suite $(n^\beta u_n)$ est décroissante à partir d'un certain rang.*
   (b) *Montrer que $\sum u_n$ converge.*
3. *Etudier la nature de la série $\sum \binom{2n}{n}\frac{1}{2^{2n}n}$*