Variables aléatoires

Antoine Louatron

Table des matières

Dans tout le chapitre, Ω désigne un univers fini munit d'une probabilité $\mathbb{P}$.

I Loi d'une variables aléatoires

I.1 Vocabulaire

I.1.1 Définition

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Une variable aléatoire sur Ω est une fonction $X : \Omega \to E$ où E est un ensemble.

Lorsque $E \subset \mathbb{R}$, on dit que X est une variable aléatoire réelle.

Explication Créer une variable aléatoire c'est associer un nombre (par exemple) aux résultats possibles d'une expérience.

I.1.2 Exemple

On prend $\Omega = [\![1,6]\!]^2$ l'univers associé au lancé simultané de deux dés (avec la probabilité uniforme). On peut poser $X : \left\{ \begin{array}{ccc} \Omega & \to & \mathbb{R} \\ (a,b) & \mapsto & a+b \end{array} \right.$ qui décrit la somme des deux dés lancés.

I.1.3 Image réciproque

Si $f : E \to F$ est une application et $B \subset F$, on note $f^{-1}(B)$ (image réciproque de B par f) l'ensemble $A = \{x \in E |\ f(x) \in B\}$.

Par exemple, si f est linéaire, $f^{-1}(\{0\}) = \ker(f)$.

I.1.4 Notation

Soit $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire. Si $A \subset E$ on note $\{X \in A\}$ ou $(X \in A)$ l'ensemble $X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega |\ X(\omega) \in A\}$. Il s'agit ici d'image réciproque et en aucun cas d'une bijection réciproque. Il s'agit d'un événement, car $X^{-1}(A) \subset \Omega$

I.1.5 Exemple

En reprenant l'exemple précédent, calculer l'événement $(X \in \{11, 12\})$. On trouve $\{(5,6), (6,5), (6,6)\}$. La probabilité de cet événement est donc $\frac{3}{6^2} = \frac{1}{12}$.

I.1.6 Probabilité de valeurs

On note $\mathbb{P}(X \in A)$ la probabilité de l'événement $(X \in A) = \{X \in A\} = X^{-1}(A)$. Si A est le singleton $\{x\}$, on note plutôt $\mathbb{P}(X = x)$.

Si de plus X est à valeurs réelle, on peut considérer $A = E \cap]-\infty, x]$ l'ensemble des éléments de E qui sont $\leqslant x$. On note $(X \leqslant x)$ cet événement. Evidemment, cette définition peut s'étendre aux autres symboles de comparaison.

I.1.7 Exemple

Même exemple. Calculer $\mathbb{P}(X = 11)$, $\mathbb{P}(X \geqslant 11)$, $\mathbb{P}(X \leqslant 10)$

I.1.8 Définition

Soit X une variable aléatoire sur Ω. L'application $\mathbb{P}_X : \left\{ \begin{array}{ccc} X(\Omega) & \to & [0,1] \\ x & \mapsto & \mathbb{P}(X = x) \end{array} \right.$ est appelée loi de la variable X.

Cette loi est définie sur un ensemble fini.

Explication Connaître la loi d'une variable aléatoire, c'est en fait connaître une propriété de l'expérience étudiée et sa fréquence d'apparition. On ne s'intéresse plus à $\Omega, \mathbb{P}$ mais à $X(\Omega), \mathbb{P}_X$ qui est en quelque sorte une simplification du modèle de départ.

I.1.9 M-Remarque

Soit X une variable aléatoire. Les événements $(X = x)$ pour $x \in X(\Omega)$ forment un système complet d'événements de Ω. Ainsi on a $\sum\limits_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x) = 1$.

I.1.10 Exemple

On reprend l'exemple du lancé de 2 dés. On note X la variable aléatoire ayant pour valeur la valeur obtenue par le premier dé et S la variable aléatoire ayant pour valeur la somme des faces obtenues. Calculer les lois de X et S.

I.1.11 Définition

Soit $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire et A un événement de Ω tel que $\mathbb{P}(A) > 0$. On appelle loi conditionnelle de X sachant A l'application $x \mapsto \mathbb{P}_A(X = x) = \mathbb{P}(X = x|A)$.

I.1.12 Exemple
Même X et S que dans l'exemple précédent. Calculer la loi de S sachant $(X = 4)$.

I.1.13 Définition
Soit $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire et $f : X(\Omega) \to F$. Alors $f \circ X : \Omega \to F$ est une variable aléatoire que l'on note $f(X)$.

Sa loi est déterminée par la loi de X car on a $\mathbb{P}(f(X) = y) = \sum\limits_{\substack{x \in X(\Omega) \\ et\ y=f(x)}} \mathbb{P}(X = x)$

Preuve.
En effet on a $f(X(\omega)) = y \iff X(\omega) = x$ et $f(x) = y$. ■

I.1.14 Exemple
X est un entier aléatoire entre 1 et 2n. Calculer la loi de $(-1)^X$.

I.2 Loi usuelles

I.2.1 Théorème
Soit E un ensemble fini et $p : E \to [0, 1]$ une fonction. p est la loi d'une variable aléatoire d'image E ssi $\sum\limits_{e \in E} p(e) = 1$.

Preuve.
Si p est la loi d'une VA alors $\sum p(e) = 1$ comme on l'a déjà remarqué.

Réciproquement, il faut construire une application $X :? \to E$ telle que $\mathbb{P}(X = e) = p(e)$ pour tout e. Il suffit de prendre $\Omega = E$ munit de la probabilité $\mathbb{P}(\{e\}) = p(e)$. Alors $X = id_E$ convient. ■

Explication On va maintenant donner des noms aux cas classiques de telles fonctions p.

I.2.2 Définition
Soit E un ensemble fini et $X : \Omega \to E$ une VA. On dit que X suit la loi uniforme sur E (on note $\mathcal{U}(E)$ cette loi) ssi $\mathbb{P}(X = x) = \frac{1}{|E|}$ pour tout $x \in E$.

I.2.3 Exemple
La variable X du premier lancé de dé, ou la variable X du choix d'un entier au hasard entre 1 et $2n$.

Explication Comme pour la probabilité uniforme, la loi uniforme est la loi "par défaut", qui représente l'idée que l'on se fait du hasard.

I.2.4 Définition
Soit $p \in [0, 1]$ un nombre fixé et $E = \{0, 1\}$ un ensemble de cardinal 2. Soit $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire. On dit que X suit la loi de Bernoulli de paramètre p (notée $\mathcal{B}(p)$) ssi $\mathbb{P}(X = 1) = p, \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$.

Explication On utilise cette loi quand la variable X décrit le succès ou l'échec d'une expérience. p est la probabilité de succès.

I.2.5 Exemple
On tire une pièce truquée et X vaut 1 quand elle tombe sur pile, 0 quand elle tombe sur face.

I.2.6 Exemple
Soit $A \subset \Omega$. La fonction indicatrice de A est la fonction $1_A : \omega \mapsto 1 si \omega \in A$ et 0 sinon.

On note $p = \mathbb{P}(A)$. Alors la VA 1_A suit la loi de Bernoulli de paramètre p.

I.2.7 Définition
Soit $p \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}$ non nul. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0, n]\!]$. On dit que X suit la loi binomiale de paramètre n et p ssi

$$\forall k \in [\![0, n]\!] \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

Preuve.
on a bien $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} = (p + 1 - p)^n = 1$. ■

Explication Cette loi apparaît naturellement lors de la modélisation de la répétition de n expériences aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre p. On parle de tirage avec remise.

En effet, dans cette modélisation de tirage avec remise, l'événement $(X = k)$ consiste en n "tirages" aléatoires dont k favorables et $n-k$ non favorables. Par indépendance des événements, chaque telle répartition a une probabilité de $p^k(1-p)^{n-k}$ et il y a $\binom{n}{k}$ tels événements disjoints (on considère le nombre de manière de répartir les k succès).

I.2.8 Exemple
On envoi 5 élèves au tableau au cours du TD (tirage avec remise). Dans le groupe il y a 14 élèves dont 2 filles. Donner la loi de la variable X du nombre de fille envoyé, pareil pour Y le nombre de garçon.

I.2.9 Exemple
Un problème d'urne, pour changer. Dépouillement après les européennes. Dans une urne 25% des 1000 bulletins sont pour un certain parti. On tire 10 bulletins, avec quelle probabilité obtient-on 2 bulletins pour ce parti ? 3 ? Quel est le nombre moyen auquel on s'attend ?

II Plusieurs variables aléatoires...

II.1 Loi conjointe

II.1.1 Définition
On considère deux variables aléatoire X, Y définies sur un même univers fini Ω. La variable aléatoire $\left\{\begin{array}{ccc} \Omega & \to & X(\Omega)\times Y(\Omega) \\ \omega & \mapsto & (X(\omega), Y(\omega)) \end{array}\right.$ *est notée (X, Y) et sa loi $\mathbb{P}_{(X,Y)}$ est appelée loi conjointe de X et Y.*

Pour $x, y \in X(\omega)\times Y(\Omega)$ on a $\mathbb{P}_{X,Y}(x, y) = \mathbb{P}((X = x) \text{ et } (Y = y)) = \mathbb{P}(X = x, Y = y)$

La loi $\mathbb{P}_X$ est alors appelée première loi marginale de $\mathbb{P}_{(X,Y)}$ et la loi $\mathbb{P}_Y$ deuxième loi marginale.

Evidemment, on peut considérer des nuples au lieu de couples et obtenir une loi conjointe à n loi marginales.

II.1.2 Remarque

Attention, a priori $(X, Y)(\Omega) \neq X(\omega)\times Y(\Omega)$. L'ensemble des valeurs de la variable couple n'est pas forcément toutes les valeurs de l'ensemble d'arrivé. Regardez la construction : on prend le même ω pour X et Y.

Exemple : Deux tirages successifs sans remise dans une urne contenant 5 boules numérotées. X la valeur de la première boule, Y la valeur de la deuxième. Alors $X(\omega)\times Y(\Omega) = [\![1, 5]\!]^2$ mais dans $(X, Y)(\Omega)$ il n'y a pas les couples de la forme (k, k) avec $k \in [\![1, 5]\!]$.

En particulier la loi de (X, Y) est nulle pour ces couples : $\mathbb{P}(X = 2, Y = 2) = 0$.

II.1.3 Exercice
Trouver la probabilité $\mathbb{P}(X = x)$ si on ne connaît que la loi conjointe avec Y.

II.1.4 Exemple
On tire successivement les 4 boules d'une urne contenant 1 boule blanche, une verte de 2 rouges. On note X le rang d'apparition de la boule blanche et Y le rang d'apparition de la deuxième boule rouge. Présenter la loi conjointe dans un tableau. Retrouver les lois de X et Y.

II.1.5 Attention

On ne peut pas donner la loi conjointe en ayant seulement les lois marginales : on ne connaît que les sommes et pas les coefficients du tableau.

II.1.6 Définition
Soient X, Y deux variables aléatoires définies sur Ω.

On appelle loi conditionnelle de Y sachant $(X = x)$ (pour un $x \in X(\Omega)$ fixé événement de probabilité non nulle) l'application :

$$\left\{\begin{array}{ccc} Y(\Omega) & \to & [0, 1] \\ y & \mapsto & \mathbb{P}((Y = y)|(X = x)) = \frac{\mathbb{P}(Y=y \text{ et } X=x)}{\mathbb{P}(X=x)} \end{array}\right.$$

II.1.7 Exemple
Même exemple, trouver la loi conditionnelle de Y sachant $(X = 2)$

II.1.8 Exercice
Retrouver la probabilité de $\mathbb{P}(Y = y)$ si on connaît les lois conditionnelle et la loi de X. On pourra noter $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$

II.2 Variables indépendantes

II.2.1 Définition

Soient X, Y deux variables aléatoires sur Ω. on dit qu'elles sont indépendantes ssi $\forall x, y \in X(\Omega) \times Y(\Omega) \mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y)$ ie ssi les événements $(X = x)$ et $(Y = y)$ sont deux à deux indépendants pour toutes les valeurs possibles de x et y.

II.2.2 Exemple

Notre exemple d'urnes est un exemple de variables non indépendantes.

un exemple de couple de variables indépendantes : on lance successivement 2 dés et on note X la valeur du premier, Y la valeur du second.

II.2.3 Proposition

Soient X, Y deux variables indépendantes et $A \subset X(\Omega), B \subset Y(\Omega)$. Alors $\mathbb{P}((X, Y) \in A \times B) = \mathbb{P}(X \in A) \times \mathbb{P}(Y \in B)$.

Preuve.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}((X,Y) \in A \times B) = \mathbb{P}(\bigcup_{(x,y)\in A\times B} (X = x \text{ et } Y = y)) &= \sum_{x\in A \text{ et } y\in B} \mathbb{P}(X = x, Y = y) \\
&= \sum_{x\in A}\sum_{y\in B} \mathbb{P}(X = x, Y = y) = \sum_{x\in A}\sum_{y\in B} \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y) \\
&= \sum_{x\in A} \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y \in B) = \mathbb{P}(Y \in B)\mathbb{P}(X \in A) \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

II.2.4 Définition

Soit $X_1, \dots, X_n$ n variables aléatoires sur Ω. On dit qu'elles sont mutuellement indépendantes ssi $\forall x_1 \in X_1(\Omega), \dots, x_n \in X_n(\Omega) \mathbb{P}(X_1 = x_1 \text{ et } \dots \text{ et } X_n = x_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i = x_i)$.

II.2.5 Exemple

Produit de 3 variables indépendantes suivant des lois de Bernoulli de paramètres a, b, c respectivement.

II.2.6 Exemple

Calculer la somme de n variables mutuellement indépendantes suivants des lois de Bernoulli de paramètres p (on répète n fois indépendamment la même expérience). $\mathbb{P}(\sum X_i = k) = \sum_? \mathbb{P}(X_? = 1 \text{ et } X_? = 0)$. Le but est d'écrire k comme une somme de 0 et 1. Il faut donc choisir k variables parmi les n qui valent 1 et les autres valent 0. Cela revient à choisir k entiers dans $[\![1, n]\!]$ et il y a par définition $\binom{n}{k}$ manière de faire ceci.

La probabilité pour que k variables valent 1 et $n - k$ valent 0 est $p^k(1 - p)^{n-k}$ par produit de probabilités pour des événements indépendants.

Finalement $\mathbb{P}(\sum_1^n X_i = k) = \binom{n}{k} p^k(1 - p)^{n-k}$ comme prévu.

II.2.7 M-Remarque

N'est pas équivalent à 2 à 2 indépendantes. une seule implication.

II.2.8 Proposition

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes définies sur Ω. Soient également $A_i \in X_i(\Omega)$ des ensembles. Alors les événements $(X_i \in A_i)$ sont mutuellement indépendants.

Preuve.
Admis ■

II.2.9 Proposition
Si X, Y sont des variables aléatoires indépendantes et si on peut calculer $f(X)$ et $g(Y)$ pour des fonctions f et g alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

III Espérance, variance

III.1 Espérance

III.1.1 Définition
Soit X une variable aléatoire réelle. On appelle espérance de X et on note $E(X)$ le nombre $\sum_{x\in X(\Omega)} x \times \mathbb{P}(X = x)$. Elle ne dépend que de la loi de X.

On dit que X est centrée ssi $E(X) = 0$.

Explication Moyenne, moyenne pondérée (par la proba).

III.1.2 Exemple
Jeu de grattage (chiffres FDJ) : prix du jeu 1 ? Sur 1 500 000 tickets : (nombre de tickets : gain)

- 4 : 1000 euros
- 60 : 250 euros
- 80 : 50 euros
- 500 : 20 euros
- 21 000 : 10 euros
- 43 000 : 5 euros
- 188 000 : 2 euros
- 111 000 : 1 euro

Espérance de gain : 0.63 centime. En moyenne la FDJ gagne 0.37 centime par ticket acheté.

III.1.3 Proposition
Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire. Alors $E(X) = \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\})$.

Preuve.
Il suffit de regrouper par valeur de X et de se souvenir que les événements élémentaires sont disjoints, donc la somme de leurs proba est la proba de la réunion, ie de l'événement $(X = x)$ si on considère la valeur x de X.■

III.1.4 Exemple

1. $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire constante égale à $a \in \mathbb{R}$. $E(X) = \sum_{\omega\in\Omega} a\mathbb{P}(\{\omega\}) = a \sum \mathbb{P}(\{\omega\}) = a$.
2. Si $A \subset \Omega$ est un événement. On pose 1_A la fonction indicatrice de A ie $1_A(\omega) = 1$ ssi $\omega \in A$ et sinon $1_A(\omega) = 0$. Alors $E(1_A) = \mathbb{P}(A)$.
3. Si X suit la loi uniforme sur $\{x_1, \dots, x_n\}$ alors $E(X) = \frac{1}{n}\sum_1^n x_i$; C'est la moyenne arithmétique des nombres x_i.
4. X suit une loi de Bernoulli de paramètre p. $E(X) = 1 * p + 0 * (1 - p) = p$.
5. X suit une loi binomiale de paramètre $p \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}$.
   $E(X) = \sum_{k=0}^n k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$. Calculons ceci. On pose $f : x \mapsto \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}e^{kx} = (pe^x + 1 - p)^n$. Alors f' existe (fonction polynomiale) et
   $$f' : x \mapsto \sum_{k=0}^n k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}e^{kx} = npe^x(pe^x + 1 - p)^{n-1}$$
   En prenant $x = 0$ on trouve $E(X) = np$.

III.1.5 Proposition (Propriétés de l'espérance)
Soient X, Y deux variables aléatoires réelles sur Ω.

1. *Linéarité. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. $E(\lambda X + \mu Y) = \lambda E(X) + \mu E(Y)$.*
2. *Positivité : si $X \geqslant 0$ alors $E(X) \geqslant 0$.*
3. *Croissance. Si $\forall \omega \in \Omega\ X(\omega) \leqslant Y(\omega)$ (que l'on note $X \leqslant Y$) alors $E(X) \leqslant E(Y)$.*

Preuve.

1. $E(\lambda X + \mu Y) = \sum_{\omega \in \Omega} (\lambda X(\omega) + \mu Y(\omega))\mathbb{P}(\{\omega\}) = \lambda E(X) + \mu E(Y)$ après développement + séparation des sommes + factorisation (on a utilisé III.1.3)
2. D'après la définition, $E(X)$ est une somme de nombres positifs quand X est à valeurs positives.
3. Simple conséquence de la linéarité + positivité. Voir les cours d'intégration 1 et 2. ∎

III.1.6 Exemple
Re-calcul de l'espérance d'une variable de loi $\mathcal{B}(n,p)$ par somme. np directement.

III.1.7 Théorème (Théorème de transfert)
Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire et f une fonction définie sur $X(\Omega)$.
Alors $E(f(X)) = \sum\limits_{x \in X(\Omega)} f(x)\mathbb{P}(X = x)$. Ainsi l'espérance de $f(X)$ est déterminée par la loi de X.

Preuve.
A priori $E(f(X)) = \sum_{y \in f(X(\Omega))} y\mathbb{P}(f(X) = y)$. Or $\mathbb{P}(f(X) = y) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ y = f(x)}} \mathbb{P}(X = x)$. On remarque en plus que quand y parcours $f(X(\Omega))$, les x tels que $y = f(x)$ sont exactement tous les x de $X(\Omega)$, une seule fois. Ceci conclut.

Deuxième preuve : On a $E(F(X)) = \sum_{\omega \in \Omega} f(X(\omega))\mathbb{P}(\{\omega\}$. On regroupe par valeurs de X : $E(f(X)) = \sum\limits_{x \in X(\omega)} \sum_{\omega \in (X = x)} f(x)\mathbb{P}(\{\omega\}) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)\mathbb{P}(X = x)$. ∎

III.1.8 Exemple
X est une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{U}(\llbracket 0, n-1 \rrbracket)$ pour $n \geqslant 2$. Calculer son espérance puis l'espérance de $e^{\frac{iX\pi}{n}}$.

Espérance de $(-1)^Y$ où Y suit une loi $\mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$.

III.1.9 Proposition
Soient X, Y deux variables aléatoires réelles sur Ω. SI elles sont indépendantes, ALORS $E(XY) = E(X)E(Y)$.

Preuve.
On a $E(XY) = \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} xy\mathbb{P}(X = x, Y = y)$ d'après le théorème de transfert appliqué à (X,Y) et la fonction $f : (a,b) \mapsto ab$.

Alors $E(XY) = \sum_x \sum_y xy\mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y) = E(X)E(Y)$. ∎

III.1.10 Attention

L'identité est fausse en générale. Prendre X telle que $\mathbb{P}(X = -1) = \frac{1}{2}, \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{2}$. Alors $E(X) = 0$. $E(X^2) = 1 \neq E(X)E(X)$.

Plus sournoisement, la réciproque est fausse. Prenons X une variable aléatoire de loi uniforme sur $\{-1, 0, 1\}$. Alors $E(X) = 0$. Par exemple X est l'identité de $\llbracket -1, 1 \rrbracket$ munit de la probabilité uniforme. On prend $Y : k \mapsto 1 - k^2$ ie $Y = 1 - X^2$ qui vaut 0 quand X est non nulle et 1 quand X vaut 0.

Alors $E(X) = 0$, $E(Y) = \frac{1}{3}$.

De plus $E(XY) = 0$ car XY est constamment nulle.

Finalement X et Y ne sont pas indépendantes car $\mathbb{P}(X = 0, Y = 0) = 0 \neq \frac{1}{9}$.

III.2 Ecart type

III.2.1 Définition

Soit X une variable aléatoire réelle. On appelle variance de X la quantité $V(X) = E((X - E(X))^2) \in \mathbb{R}^+$.

L'écart type de X est $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

On dit que X est réduite ssi $V(X) = \sigma(X) = 1$

Explication On calcule l'écart moyen à la moyenne, en tant que distance pour σ (d'où la $\sqrt{?}$ pour l'homogénéité)

III.2.2 Proposition

Soit X une variable aléatoire réelle.

Alors $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ (on en déduit d'ailleurs que $E(X^2) \geqslant E(X)^2$)

Preuve.
On a $V(X) = E(X^2 - 2XE(X) + E(X)^2) = E(X^2) - 2E(X)E(X) + E(E(X)^2) = E(X^2) - E(X)^2$. ■

III.2.3 Exemple

1. X de loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. Alors $E(X) = \frac{n+1}{2}$. Calculer $V(X)$.
2. X de loi $\mathcal{B}(p)$. $V(X) = p - p^2 = p(1-p)$.
3. X de loi $\mathcal{B}(n,p)$. $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$. On a déjà $E(X) = np$. Il reste à calculer $E(X^2) = \sum\limits_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = f''(0)$ avec les notations pour l'espérance. Or $f' : x \mapsto npe^x(pe^x + 1 - p)^{n-1}$. Donc $f'' : x \mapsto npe^x(pe^x + 1 - p)^{n-1} + n(n-1)p^2e^{2x}(pe^x + 1 - p)^{n-2}$. Ainsi $E(X^2) = np + n(n-1)p^2 = np(1 + (n-1)p)$.
   Finalement $V(X) = np(1 + np - p) - n^2p^2 = np(p-1)$.

III.2.4 Proposition

Soit X une variable aléatoire réelle et $a, b \in \mathbb{R}$. $V(aX + b) = a^2V(X)$.

Preuve.
Méthode 1 : $V(aX + b) = E((aX + b - E(aX + b))^2) = E((a(X - E(X)))^2) = a^2E((X - E(X))^2)$.

Méthode 2 : On a $V(aX+b) = E(a^2X^2+2abX+b^2) - E(aX+b)^2 = a^2E(X^2)+2abE(X)+b^2-(aE(X)+b)^2 = a^2E(X^2) - a^2E(X)^2 = a^2E(X)$.

III.2.5 M-Remarque

Soit X une variable aléatoire de variance non nulle. Alors $Y = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduire.

En effet par linéarité $E(Y) = \frac{E(X) - E(X)}{\sigma(X)} = 0$ et d'après la proposition précédente $V(Y) = \frac{1}{\sigma(X)^2}V(X) = 1$.

III.2.6 Proposition

Soit X une variable aléatoire réelle. $V(X) = 0$ ssi $X = E(X)$ est de probabilité 1, c'est à dire $E(X)$ est le seul nombre ou la loi de X est non nulle.

Preuve.
Supposons $V(X) = 0$ ie $E((X - E(X))^2) = 0$ ou encore $\sum_{x \in X(\Omega)} (x - E(X))^2 \mathbb{P}(X = x) = 0$. Cette somme est une somme de nombre positifs qui sont donc tous nuls. C'est à dire que soit $\mathbb{P}(X = x)$ est nulle, soit $x = E(X)$. Finalement $(X = E(X))$ est le seul événement du système complet $\{(X = x) | x \in X(\Omega)\}$ à avoir une probabilité non nulle donc sa probabilité est 1. ■

III.3 Inégalités

III.3.1 Théorème (Inégalité de Markov)
Soit X une variable aléatoire réelle et $a > 0$. $\mathbb{P}(|X| \geqslant a) \leqslant \frac{E(|X|)}{a}$.

Preuve.
On se souvient qu'en général on a $\mathbb{P}(A) = E(1_A)$ pour un événement A.

On pose $A = (|X| \geqslant a)$. Alors pour tout les $\omega \in A$ on a $a \leqslant |X(\omega)|$. Ainsi $1_A \times a \leqslant 1_a \times |X| \leqslant |X|$. Par croissance de l'espérance et par linéarité, on conclut directement. ∎

Explication Si a est beaucoup plus grand que la moyenne (raisonnons sur une variable positive), alors la probabilité pour que X soit plus grande que a est faible. Normal, sinon la moyenne serait plus élevée...

Explication technique On a forcément $a\mathbb{P}(|X| \geqslant a) \leqslant E(|X|)$. Car la quantité de gauche ne compte que les valeurs de $|X|$ plus grande que a. On oublie tout ce qui est plus petit.

III.3.2 Théorème (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev)
Soit X une variable aléatoire réelle et $a > 0$.

Alors $\mathbb{P}(|X - E(X)| > a) \leqslant \frac{V(X)}{a^2}$.

Preuve.
On applique l'inégalité précédente à $(X - E(X))^2 \geqslant 0$.

$\mathbb{P}((X - E(X))^2 \geqslant a^2) \leqslant \frac{E((X-E(X))^2)}{a^2} = \frac{V(X)}{a^2}$.

Hors, $(X - E(X))^2 \geqslant a^2 \iff |X - E(X)| \geqslant |a| = a$... ∎

Explication On quantifie cette fois l'écart entre X et sa "moyenne". La variance apparaît naturellement.

III.3.3 Exemple
On pose S_n la moyenne de n variables de loi de Bernoulli indépendantes de paramètre p. $S = \frac{1}{n}\sum X_i$.

Alors $E(S) = p$ et $V(S) = \frac{p(p-1)}{n^2}$.

S représente la proportion de succès après n tirages indépendants. Alors $\mathbb{P}(|S - p| > a) = \frac{p(p-1)}{na^2}$.

On veut $\mathbb{P}(|S - p| > a) \leqslant 5\%$. Comment choisir a ? Il faut $\frac{p(p-1)}{na^2} \leqslant \frac{5}{100} \iff a^2 \leqslant 20\frac{p(p-1)}{n^2}$.

On peut prendre $a = \sqrt{20}\frac{\sqrt{p(p-1)}}{n} = \sqrt{20}\frac{\sigma(S)}{\sqrt{n}}$.