I Loi d'une variables aléatoires

I.1 Vocabulaire

Définition 1
Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Une variable aléatoire sur Ω est une fonction $X : \Omega \to E$ où E est un ensemble.

Lorsque $E \subset \mathbb{R}$, on dit que X est une variable aléatoire réelle.

Définition 2
Soit X une variable aléatoire sur Ω. L'application $\mathbb{P}_X : \left\{ \begin{array}{ccc} X(\Omega) & \to & [0,1] \\ x & \mapsto & \mathbb{P}(X = x) \end{array} \right.$ est appelée loi de la variable X.

Cette loi est définie sur un ensemble fini.

Définition 3
Soit $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire et A un événement de Ω tel que $\mathbb{P}(A) > 0$. On appelle loi conditionnelle de X sachant A l'application $x \mapsto \mathbb{P}_A(X = x) = \mathbb{P}(X = x|A)$.

Définition 4
Soit $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire et $f : X(\Omega) \to F$. Alors $f \circ X : \Omega \to F$ est une variable aléatoire que l'on note $f(X)$.

Sa loi est déterminée par la loi de X car on a $\mathbb{P}(f(X) = y) = \sum\limits_{\substack{x \in X(\Omega) \\ \text{et } y = f(x)}} \mathbb{P}(X = x)$

I.2 Loi usuelles

Théorème 1
Soit E un ensemble fini et $p : E \to [0,1]$ une fonction. p est la loi d'une variable aléatoire d'image E ssi $\sum\limits_{e \in E} p(e) = 1$.

Définition 5
Soit E un ensemble fini et $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire. On dit que X suit la loi uniforme sur E (on note $\mathcal{U}(E)$ cette loi) ssi $\mathbb{P}(X = x) = \frac{1}{|E|}$ pour tout $x \in E$.

Définition 6
Soit $p \in [0,1]$ un nombre fixé et $E = \{0,1\}$ un ensemble de cardinal 2. Soit $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire. On dit que X suit la loi de Bernoulli de paramètre p (notée $\mathcal{B}(p)$) ssi $\mathbb{P}(X = 1) = p, \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$.

Définition 7
Soit $p \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$ non nul. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0,n]\!]$. On dit que X suit la loi binomiale de paramètre n et p ssi

$$\forall k \in [\![0,n]\!] \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

II Plusieurs variables aléatoires...

II.1 Loi conjointe

Définition 8
On considère deux variables aléatoire X, Y définies sur un même univers fini Ω. La variable aléatoire $\left\{ \begin{array}{ccc} \Omega & \to & X(\Omega) \times Y(\Omega) \\ \omega & \mapsto & (X(\omega), Y(\omega)) \end{array} \right.$ est notée (X,Y) et sa loi $\mathbb{P}_{(X,Y)}$ est appelée loi conjointe de X et Y.

Pour $x, y \in X(\omega) \times Y(\Omega)$ on a $\mathbb{P}_{X,Y}(x,y) = \mathbb{P}((X = x) \text{ et } (Y = y)) = \mathbb{P}(X = x, Y = y)$

La loi $\mathbb{P}_X$ est alors appelée première loi marginale de $\mathbb{P}_{(X,Y)}$ et la loi $\mathbb{P}_Y$ deuxième loi marginale.

Evidemment, on peut considérer des nuples au lieu de couples et obtenir une loi conjointe à n loi marginales.

Définition 9
Soient X, Y deux variables aléatoires définies sur Ω.

On appelle loi conditionnelle de Y sachant $(X = x)$ (pour un $x \in X(\Omega)$ fixé tel que l'événement est de probabilité non nulle) l'application :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} Y(\Omega) & \to & [0,1] \\ y & \mapsto & \mathbb{P}((Y = y)|(X = x)) = \frac{\mathbb{P}(Y = y \text{ et } X = x)}{\mathbb{P}(X = x)} \end{array} \right.$$

II.2 Variables indépendantes

Définition 10
Soient X, Y deux variables aléatoires sur Ω. on dit qu'elles sont indépendantes ssi $\forall x, y \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$ $\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y)$ ie ssi les événements $(X = x)$ et $(Y = y)$ sont deux à deux indépendants pour toutes les valeurs possibles de x et y.

Proposition 1
Soient X, Y deux variables indépendantes et $A \subset X(\Omega), B \subset Y(\Omega)$. Alors $\mathbb{P}((X,Y) \in A \times B) = \mathbb{P}(X \in A) \times \mathbb{P}(Y \in B)$.

Définition 11
Soit $X_1, \ldots, X_n$ n variables aléatoires sur Ω. On dit qu'elles sont mutuellement indépendantes ssi $\forall x_1 \in X_1(\Omega), \ldots, x_n \in X_n(\Omega) \mathbb{P}(X_1 = x_1 \text{ et } \ldots \text{ et } X_n = x_n) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i = x_i)$.

Proposition 2
Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes définies sur Ω. Soient également $A_i \in X_i(\Omega)$ des ensembles. Alors les événements $(X_i \in A_i)$ sont mutuellement indépendants.

Proposition 3
Si X, Y sont des variables aléatoires indépendantes et si on peut calculer $f(X)$ et $g(Y)$ pour des fonctions f et g alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

III Espérance, variance

III.1 Espérance

Définition 12
Soit X une variable aléatoire réelle. On appelle espérance de X et on note $E(X)$ le nombre $\sum_{x\in X(\Omega)} x \times \mathbb{P}(X=x)$. Elle ne dépend que de la loi de X.

On dit que X est centrée ssi $E(X)=0$.

Proposition 4
Soit $X:\Omega\to\mathbb{R}$ une variable aléatoire. Alors $E(X)=\sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\})$.

Proposition 5 (Propriétés de l'espérance)
Soient X, Y deux variables aléatoires réelles sur Ω.

1. *Linéarité. Soient $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$. $E(\lambda X+\mu Y)=\lambda E(X)+\mu E(Y)$.*
2. *Positivité : si $X\geqslant 0$ alors $E(X)\geqslant 0$.*
3. *Croissance. Si $\forall\omega\in\Omega$ $X(\omega)\leqslant Y(\omega)$ (que l'on note $X\leqslant Y$) alors $E(X)\leqslant E(Y)$.*

Théorème 2 (Théorème de transfert)
Soit $X:\Omega\to\mathbb{R}$ une variable aléatoire et f une fonction définie sur $X(\Omega)$.

Alors $E(f(X))=\sum_{x\in X(\Omega)} f(x)\mathbb{P}(X=x)$. Ainsi l'espérance de $f(X)$ est déterminée par la loi de X.

Proposition 6
Soient X, Y deux variables aléatoires réelles sur Ω. SI elles sont indépendantes, ALORS $E(XY)=E(X)E(Y)$.

III.2 Ecart type

Définition 13
Soit X une variable aléatoire réelle. On appelle variance de X la quantité $V(X)=E((X-E(X))^2)\in\mathbb{R}^+$.

L'écart type de X est $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$.

On dit que X est réduite ssi $V(X)=\sigma(X)=1$

Proposition 7
Soit X une variable aléatoire réelle.

Alors $V(X)=E(X^2)-E(X)^2$ (on en déduit d'ailleurs que $E(X^2)\geqslant E(X)^2$)

Proposition 8
Soit X une variable aléatoire réelle et $a,b\in\mathbb{R}$. $V(aX+b)=a^2V(X)$.

Proposition 9
Soit X une variable aléatoire réelle. $V(X)=0$ ssi $X=E(X)$ est de probabilité 1, c'est à dire $E(X)$ est le seul nombre ou la loi de X est non nulle.

III.3 Inégalités

Théorème 3 (Inégalité de Markov)
Soit X une variable aléatoire réelle et $a>0$. $\mathbb{P}(|X|\geqslant a)\leqslant \frac{E(|X|)}{a}$.

Théorème 4 (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev)
Soit X une variable aléatoire réelle et $a>0$.

Alors $\mathbb{P}(|X-E(X)|>a)\leqslant\frac{V(X)}{a^2}$.