Intégration sur un segment

Antoine Louatron

Table des matières

Dans tout le chapitre, il sera entendu que si on note $[a, b]$ alors $a \leqslant b$...

I Rappels : intégrale d'une fonction continue

I.1 Définition

I.1.1 Définition

Soient $a, b \in \mathbb{R}, a \leqslant b$.

1. *Une subdivision de $[a, b]$ est une famille $x_0, \ldots, x_n$ telle que $x_0 = a < x_1 \cdots < x_n = b$.*
2. *$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est dite en escalier s'il existe une subdivision $\{x_i\}_{i \in [\![0,n]\!]}$ telle que f est constante sur $]x_i, x_{i+1}[$ pour tout i. Une telle subdivision est dite adaptée à f.*
   Un exemple de telle fonction est la fonction partie entière. Un autre exemple est

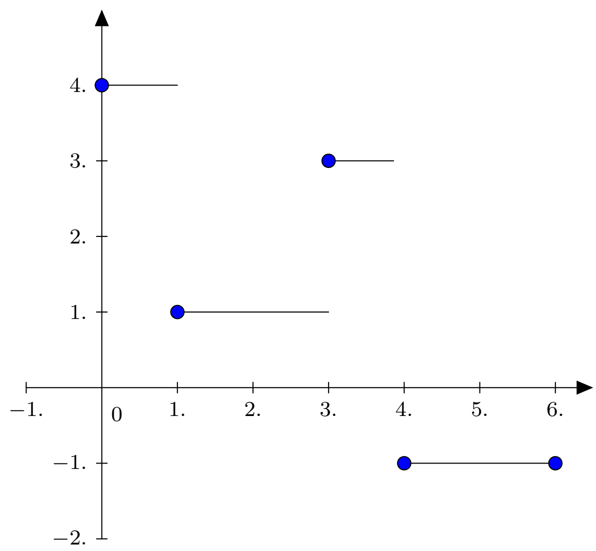

Figure 1 – Une fonction en escalier sur $[0, 6]$

I.1.2 intégrale d'une fonction continue

Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue alors on peut trouver des fonctions en escaliers arbitrairement "proches" de f et ainsi trouver une valeur approchée de l'aire sous la courbe. L'intégrale de f est la limite de telles approximations.

I.1.3 Notation

On note cette quantité réelle $\int_{[a,b]} f$ ou $\int_a^b f$ ou $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

I.2 Propriétés de l'intégrale

I.2.1 Théorème

Soient $f, g \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$. On a donc $a \leqslant b$.

1. *Linéarité : $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ $\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g$. En d'autres termes $\varphi \mapsto \int_a^b \varphi$ est une forme linéaire sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$.*
2. *Croissance : $f \geqslant 0 \Rightarrow \int_a^b f \geqslant 0$ et $f \leqslant g \Rightarrow \int_a^b f \leqslant \int_a^b g$.*
3. *Inégalité triangulaire : $\left| \int_a^b f \right| \leqslant \int_a^b |f|$.*

Preuve.
Ces propriétés se déduisent des propriétés analogues sur les fonctions en escalier ■

I.2.2 Exemple

Montrer que pour tout $b > 1$, $\ln(b) \leqslant 2(\sqrt{b} - 1)$ en majorant une intégrale.

I.2.3 Remarques

1. On appelle $|\int f| \leqslant \int |f|$ inégalité triangulaire, car on peut voir l'intégrale comme une somme (d'aires élémentaires) et alors on retrouve le fait bien connu que la valeur absolue d'une somme est inférieure à la somme des valeurs absolues.
2. Soit $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$. On pose $M = \max_{[a,b]}(f)$ (une fonction continue sur un segment...) Alors $|f| \leqslant M$ donc $\int_a^b |f| \leqslant M(b-a)$ et donc $|\int_a^b f| \leqslant M(b-a)$.
   A comparer avec l'IAF pour une primitive de f...

I.2.4 Proposition
Relation de Chasles Soit $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ et $c \in [a,b]$. Alors

$$\int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^b f$$

I.2.5 Définition
Soit $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$. On pose $\int_b^a f = -\int_a^b f$.

I.2.6 Remarque

On conserve la relation de Chasles par $\int_a^b f + \int_b^a f = 0 = \int_a^a f$. Ainsi on peut appliquer cette relation même quand a, c, b ne sont pas dans "le bon ordre".

La linéarité s'applique encore, mais pas les inégalités.

I.3 Fonctions complexes

I.3.1 Définition
Soit $f \in \mathbb{C}^{[a,b]}$. On dit que f est continue si $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ le sont. On pose alors

$$\int_a^b f = \int_a^b \operatorname{Re} f + i \int_a^b \operatorname{Im} f$$

I.3.2 Propriétés

L'intégrale ainsi définie est linéaire et possède la propriété de Chasles. On peut également appliquer l'inégalité triangulaire à condition de prononcer module à la place de valeur absolue.

II Calcul intégral

II.1 Primitives

II.1.1 Définition
Soit $f \in \mathcal{C}(I,\mathbb{K})$. Une primitive de f est une fonction $F : I \to \mathbb{R}$ dérivable et telle que $F' = f$. On a alors forcément $F \in \mathcal{C}^1(I,\mathbb{K})$.

II.1.2 Proposition
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors deux primitives de f diffèrent d'une constante (additive).

Preuve.
Soient F, G deux primitives de f On a alors $F' = G' = f$ et donc $(F-G)' = 0$. On en déduit (théorème des accroissements finis) que $F - G$ est constante. ■

II.1.3 Remarque

Le résultat tient encore quand f est à valeurs complexes. Appliquer à ses parties réelles et imaginaires.

II.1.4 Théorème (Théorème fondamental du calcul différentiel)
*Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction **continue** sur I et $x_0 \in I$ fixé. Alors la fonction $F : x \mapsto \int_{x_0}^x f$ est dérivable sur I de dérivée f.*

Preuve.
Soient $a \in I$ et $h > 0$.

$$\frac{F(a) - F(a+h)}{h} - f(a) = \frac{1}{h}\int_a^{a+h} f(t)\mathrm{d}t - f(a) = \frac{1}{h}\int_a^{a+h} (f(t) - f(a))\mathrm{d}t.$$

Ainsi $|\frac{F(a)-F(a+h)}{h} - f(a)| \leqslant \sup_{[a,a+h]} |f - f(a)| \int_a^{a+h} \frac{\mathrm{d}t}{h} = \sup_{[a,a+h]} |f - f(a)|$.

Si maintenant $\varepsilon > 0$ est fixé, il existe h tel que $\sup_{[a,a+h]} |f - f(a)| \leqslant \varepsilon$ par continuité de f. Ainsi $\lim_{a^+} \frac{F(x)-F(a)}{x-a} = f(a)$. Le calcul à gauche étant exactement le même, on a fini ! ■

II.1.5 Remarque

On peut tout à fait prendre f (et donc F) à valeurs complexes vu que l'on travaille sur des modules.

II.1.6 Notation

Quand f est continue, on notera souvent $\int f$ ou $\int f(x)\mathrm{d}x$ pour symboliser une primitive quelconque de f ou l'ensemble de ses primitives.

II.1.7 Corollaire
Si F est une primitive quelconque de $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ alors $\int_a^b f = F(b) - F(a)$ et si $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$ alors $\int_a^b f' = f(b) - f(a)$.

Preuve.
En effet, $F : x \mapsto \int_a^x f + K$ avec $K \in \mathbb{R}$ fixé. ■

II.1.8 Exemple
On pose $f \in \mathcal{C}^{[0,1],\mathbb{R}}$ et pour $\varphi : \left\{\begin{array}{ccc} D_\varphi & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \int_x^{x^2} f(t)\mathrm{d}t \end{array}\right.$. Calculer le domaine de définition de φ, son signe, prouver qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer sa dérivée.

II.1.9 Remarque

1. Si $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$, la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a.
2. Il existe des primitives qui ne sont pas de cette forme. Par exemple $\arctan + 10$ est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ mais ne s'annule pas donc ne peut se mettre sous forme d'une intégrale.
   Elle est de la forme $\int_a^x f + cste$.

II.1.10 Théorème
*Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction **continue** et **positive**. Alors $\int_a^b f = 0 \Rightarrow f = 0$.*

Preuve.
Soit F une primitive de f. Alors F est croissante et $F(b) = F(a)$ donc F est constante sur $[a, b]$, ainsi $F' = f = 0$ sur le segment $[a, b]$. ■

II.2 Rappel des formules

II.2.1 Théorème
Soient $u, v \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ et $a, b \in I$. Alors
$$\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'.$$

Preuve.
Comme u et v sont $\mathcal{C}^1$, la fonction $u'v + uv'$ est continue et une primitive en est uv. Alors
$$\int_a^b (u'v + uv') = [uv]_a^b$$
La linéarité conclut (les fonction $u'v$ et uv' sont continues sur $[a, b]$, donc on peut appliquer la linéarité.) ∎

II.2.2 Wallis et Stirling

Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $I_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\mathrm{d}t$.

Alors $I_0 = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = 1$. De plus, pour $n \geqslant 2$ on a $I_n = \left[-\cos(t)\sin^{n-1}(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\cos(t)\sin^{n-2}(t)\mathrm{d}t$

Or $n - 1 > 0$ (ce n'est pas $\sin^0$ dans le crochet) et donc $I_n = (n-1)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^{n-2}(t) - \sin^n(t))\mathrm{d}t = (n-1)(I_{n-2} - I_n)$ soit encore $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$.

On en déduit par récurrence que $I_{2n} = \frac{(2n-1)\times(2n-3)\times\cdots\times 1}{2n\times(2n-2)\times\cdots\times 2}\frac{\pi}{2} = \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}\frac{\pi}{2}$ (on complète la factorielle du numérateur puis on factorise tous les nombres pairs par 2).

De même $I_{2n+1} = \frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)(2n)!}$.

De plus, comme $\sin(t) \in [0, 1]$ pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\sin^{n+1}(t) \leqslant \sin^n(t)$ et donc, par croissance de l'intégrale, la suite I_n est décroissante.

Ainsi on a pour tout $n \geqslant 1$, $I_{2n-1} \geqslant I_{2n} \geqslant I_{2n+1}$ et donc, d'après le théorème II.1.10 qui prouve que $I_{2n+1} > 0$, $\frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}} \geqslant \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \geqslant 1$ ou encore $\frac{2n+1}{2n} \geqslant \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \geqslant 1$ et par encadrement $I_{2n} \underset{+\infty}{\sim} I_{2n+1}$.

Or $I_{2n} = \binom{2n}{n}\frac{1}{4^n}\frac{\pi}{2}$ et $I_{2n+1} = \frac{4^n}{(2n+1)}\frac{1}{\binom{2n}{n}}$. Ainsi $\binom{2n}{n}^2 \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{\pi}\frac{(4^n)^2}{2n+1}$ et donc $\binom{2n}{n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$.

Arrive maintenant le cours sur les séries. On a montré que $n! \underset{+\infty}{\sim} C\frac{n^n\sqrt{n}}{e^n}$ où $C > 0$ est une constante. On a alors $(2n)! \underset{+\infty}{\sim} \frac{2^{2n}n^{2n}\sqrt{2n}}{e^{2n}}$ et donc $\binom{2n}{n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2^{2n}n^{2n}\sqrt{2n}C}{e^{2n}}\frac{(e^n)^2}{(Cn^n\sqrt{n})^2} = \frac{2^{2n}\sqrt{2}}{C\sqrt{n}}$. En comparant les deux formes trouvées pour cet équivalent, et par produit, $\frac{\sqrt{2}}{C} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ et donc ces constantes sont égales. On en déduit que $C = \sqrt{2\pi}$. Finalement
$$n! \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^n}{e^n}\sqrt{2\pi n}$$

II.2.3 Théorème
Soit $\varphi \in \mathcal{C}^1([a, b], I)$ et $f :\in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$. Alors
$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,dt = \int_a^b f(\varphi(u))\varphi'(u)\,du$$

Preuve.
f admet au moins une primitive F, et alors $F \circ \varphi$ est $\mathcal{C}^1$ et de dérivée $\varphi' F' \circ \varphi = \varphi' f \circ \varphi$. Alors
$$\int_a^b \varphi' \times f \circ \varphi = [F \circ \varphi]_a^b = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f.$$
∎

III Approximations

III.1 Formules de Taylor

III.1.1 Théorème (Formule de Taylor avec reste intégral)
Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$, $a, b \in I$. Alors

$$f(b) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt.$$

Preuve.

1. $n = 0$: $f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t)\mathrm{d}t$ ce qui est clairement vrai, d'après le théorème fondamental.
2. On suppose la formule vraie pour $n \in \mathbb{N}$. Soit $f \in \mathcal{C}^{n+2}$. Alors on a déjà

$$f(b) = f(a) + \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t.$$

De plus, $f^{(n+1)}$ est maintenant $\mathcal{C}^1$ ainsi que $t \mapsto (b-t)^n$. On intègre par parties, $t \mapsto -\frac{(b-t)^{n+1}}{n+1}$ étant une primitive de $t \mapsto (b-t)^n$, on obtient

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t &= \left[-\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)\right]_a^b - \int_a^b -\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\mathrm{d}t \\ &= \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Il s'agit bien du terme suivant dans la somme et du reste intégral pour $n+1$.

Finalement, par récurrence, le théorème est vrai. ■

III.1.2 Remarque

On peut également écrire $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)(t)}\mathrm{d}t$ ou encore $f(a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(a-x)^k + \int_x^a \frac{(a-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t$.

III.1.3 Corollaire (Inégalité de Taylor-Lagrange)
Soit $f \in \mathcal{C}^{(n+1)}(I, \mathbb{R})$ et $a, x \in I$. Alors

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right| \leqslant \sup_{[a,x]} |f^{(n+1)}| \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Preuve.
On suppose pour commencer que $a < x$. Le raisonnement est similaire dans l'autre cas. La quantité à majoré est égale, d'après la formule de Taylor avec reste intégral à $\left|\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t\right|$, et il suffit maintenant d'utiliser l'inégalité triangulaire et la croissance de l'intégrale. ■

III.1.4 Exemple
Appliquer à exp entre 0 et x puis à $x \mapsto \ln(1+x)$ entre 0 et x tel que $|x| < 1$.

III.2 Sommes de Riemann

III.2.1 Définition
Soit $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ et $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$

On appelle somme de Riemann associée à f les sommes

$$Rg_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a + k\frac{b-a}{n}) \text{ et } Rd_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(a + k\frac{b-a}{n}).$$

III.2.2 Dessin

Expliquer pourquoi on appelle cette méthode la méthode des rectangles.

III.2.3 Théorème
Soit $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$. Alors les suites $(Rg_n)_n$ et (Rd_n) convergent vers $\int\limits_a^b f$.

Preuve.
On remarque d'abord que $Rd_n - Rg_n = \frac{b-a}{n}(f(b)-f(a))$ c'est à dire tend vers 0 en $+\infty$. On se contente de montrer le résultat pour Rg_n que l'on note R_n.

On se contente de montrer le cas $f \in \mathcal{C}^1$. On fixe $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$.

On pose $K = \max_{[a,b]}(f')$. D'après l'IAF, pour tout $t_1, t_2 \in [a,b]$, $|f(t_1)-f(t_2)| \leqslant K|t_1-t_2|$. On pose par commodité : $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$. On a alors

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\mathrm{d}t\right| &= \left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\mathrm{d}t - \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k)\mathrm{d}t\right| \\
&= \left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t) - f(x_k)\mathrm{d}t\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} K(t-x_k)\mathrm{d}t \\
&= K\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(x_{k+1}-x_k)^2}{2} = K\frac{(b-a)^2}{2n}
\end{aligned}$$

C'est ce qu'il fallait montrer, car la suite majorante converge vers 0. ∎

III.2.4 Remarque

On a même $Rd_n(f) = \int_a^b f + O_{+\infty}(\frac{1}{n})$.

III.2.5 Exemple

1. $\lim_{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+k} = \ln 2$.
2. $\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{(n!)}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{4n}{e}$!

III.2.6 Méthode

On utilise les sommes de Riemann soit pour approximer numériquement une intégrale que l'on arrive pas à calculer exactement, soit pour calculer des limites de sommes. Il faut alors reconnaître la fonction f.

III.3 Méthode des trapèzes

III.3.1 Explication du nom

Faire un dessin.